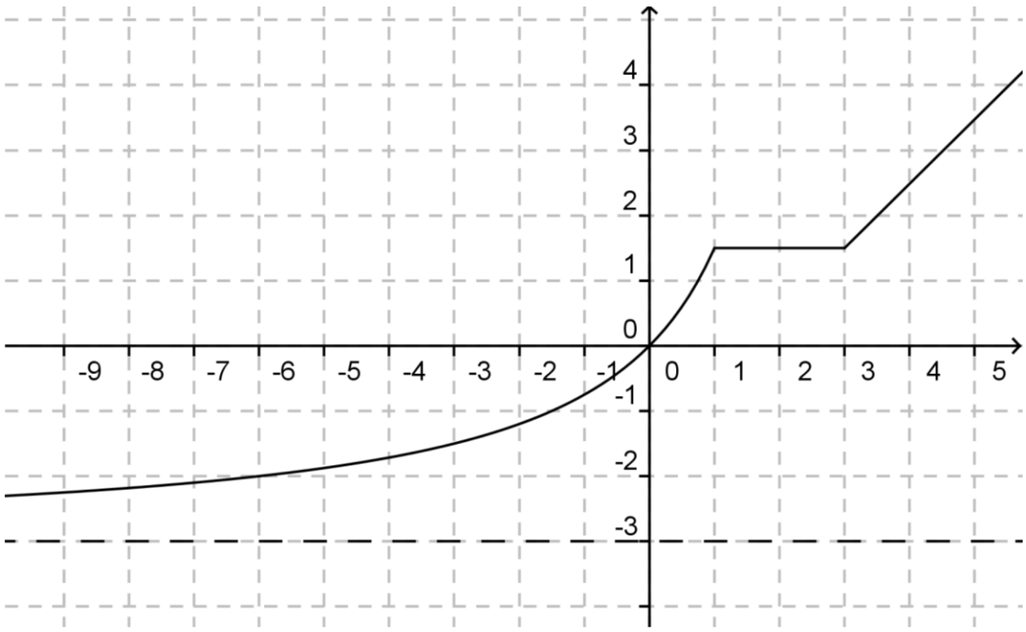
Análisis Matemático A
(para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
Guía de Repaso Sesiones 1 a 3

Cátedra Cabana

1. Determinar el conjunto más amplio de números reales (dominio natural) para el cual
$$f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-4}$$
es una función.

2. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es



Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjunto imagen e intersección con los ejes.

3. Dada la función lineal $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2}{3}x - 7$. Determinar la ordenada al origen de la función lineal g perpendicular a f que pasa por $(1, 2)$.

4. Sea f una función lineal que verifica que $f(1) = 3$ y cuyo gráfico interseca al gráfico de g, dada por $g(x) = 3x-1$, en el punto de abscisa $x = 2$. Encontrar la expresión de f.

5. Dada la función $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + \frac{1}{x^2}$. Analizar el dominio, la paridad y la intersección del gráfico con los ejes.

6. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta

   a) Toda función impar tiene como imagen todos los reales.

   b) El dominio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{3x+6}$ es $(-2, +\infty)$.

   c) Si f es una función par, g es una función impar y $f \circ g$ está bien definido, entonces $f \circ g$ es una función par.

7. Sean $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x + 1$. Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$. Analizar si $f \circ g$ es inversible.

8. Dada la función $f\colon D_f \to \mathrm{Im}(f)$, $f(x) = \frac{2x-3}{x}$. Determinar el dominio e imagen de f, calcular la función inversa y analizar paridad de esta.

9. Dadas la funciones $f\colon D_f \to \mathrm{Im}(f)$, $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $g(x) = \sqrt[3]{x+9}$. Calcular $g \circ f(-1)$.

10. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{3x+1}{-x+2}$. Hallar dominio e imagen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas y luego graficar.

11. Dada la función $f(x) = |x^2 - 4|$. Hallar dominio e imagen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Graficar.

12. Dada la recta L de ecuación $6x + 3y = 2$ hallar la ecuación de una recta perpendicular a L y que pase por el punto $P = (1, -1)$.

13. El conjunto C está determinado por $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 4 \leq x + 2\}$, expresarlo en forma de intervalo o unión de intervalos.

14. Hallar una función cuadrática cuyo conjunto de positividad sea $C^+ = (-1, 3)$ y su imagen sea $\mathrm{Im} f = (-\infty, 4]$.

15. Resolver $|2x - 1| = -2 - x$.

16. Indicar el conjunto A como intervalo o unión de intervalos:
    $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x+3} > 2\}$

17. Resolver la siguiente ecuación para $x \in \mathbb{R}$ y luego para $x \in [-\pi, \pi]$.
    $$2\cos(4x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}.$$

Respuestas:

1. $[-\frac{1}{3}, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Es creciente en $\mathbb{R}$ (más adelante se verá bien la definición).
   Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-3, +\infty)$.
   Corta a ambos ejes en el punto $(0, 0)$.

3. $b = \frac{7}{2}$

4. $f(x) = 2x + 1$

5. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, f es par. El gráfico de f no corta a ninguno de los ejes.

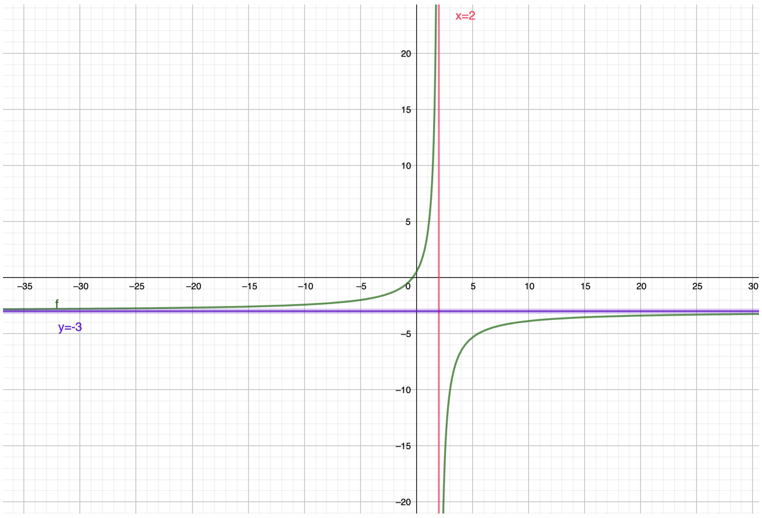
6.
   a) FALSO. Un contraejemplo es $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ cuya imagen es $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
   b) FALSO $D_f = [-2, +\infty)$.
   c) VERDADERO
   $f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x)$

7. $f \circ g(x) = \sqrt{3x+1}$; $g \circ f(x) = 3\sqrt{x} + 1$.
   Si consideramos (haciendo las restricciones necesarias)
   $f \circ g : [-1/3, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f \circ g$ es inversible.

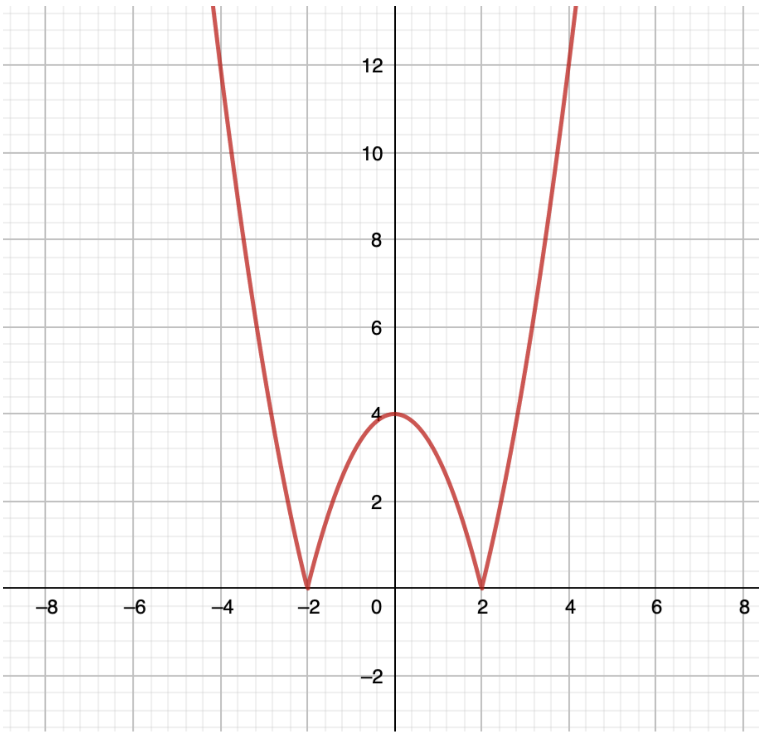
8. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $f^{-1}(x) = -\frac{3}{x-2}$, no es una función par, tampoco impar.

9. $g \circ f(-1) = \sqrt[3]{14}$

10. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$. $C^+ = (-1/3, 2)$,
    $C^- = (-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$. Crece en todo su dominio.
    AH: $y = -3$, AV: $x = 2$.



11. $D_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$. $C^+ = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $C^- = \emptyset$.
    Crece en: $(-2, 0)$, $(2, +\infty)$. Decrece en: $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$.



12. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

13. $[-3, 2]$

14. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

15. $\emptyset$

16. $(-\infty, -3)$

17. $x = \frac{-\pi + 24k\pi}{48}$ con $k \in \mathrm{Z}$ o $x = \frac{19\pi + 24k\pi}{48}$ con $k \in \mathrm{Z}$

    En $[-\pi, \pi]$:

    $x = -\frac{25}{48}\pi$, $x = -\frac{1}{48}\pi$, $x = \frac{23}{48}\pi$, $x = \frac{47}{48}\pi$, $x = -\frac{29}{48}\pi$, $x = -\frac{5}{48}\pi$, $x = \frac{19}{48}\pi$ o $x = \frac{43}{48}\pi$.