Análisis Matemático A
(para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
Práctica 4

Cátedra Cabana

Índice general

Práctica 4

ESTUDIO DE FUNCIONES Y REGLA DE L'HOPITAL

4.1. Estudio de funciones

Ejercicio 4.1. Realizar el análisis completo de las siguientes funciones f definidas por $y = f(x)$ teniendo en cuenta:

- Dominio e Imagen;
- Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas;
- Extremos locales y puntos silla;
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento;
- Graficar.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

b. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

c. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1$

d. $f(x) = x + \frac{4}{x}$

e. $f(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$

f. $f(x) = x\sqrt{9 - x}$

g. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 2 \\ 2(x-3)^2 + 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

h. $f(x) = 3xln(x)$

i. $f(x) = e^{x^2+x}$

j. $f(x) = xe^{-x^2-x}$

k. $f(x) = e^{1/x}$

l. $f(x) = x^2ln(x)$

m. $f(x) = e^{-x^2}$

n. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

ñ. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Ejercicio 4.2. De los siguientes ítems del ejercicio 1, calcular: raíces, conjunto de positividad y negatividad

- d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ

Ejercicio 4.3. En los siguientes ítems del ejercicio 1, calcular intervalos de concavidad positiva e intervalos de concavidad negativa y puntos de inflexión.
- a, b, c, d, e, f, g, h, i, k

Ejercicio 4.4. Dadas las siguientes funciones f definidas por $y = f(x)$, indicar imagen, extremos absolutos y relativos en el dominio indicado en cada ítem. Graficar.

a. $f(x) = x^5 - 20x + 2, \quad x \epsilon\, [-2, 3]$

b. $f(x) = x^5 - 20x + 2, \quad x \epsilon\, [-1, 3]$

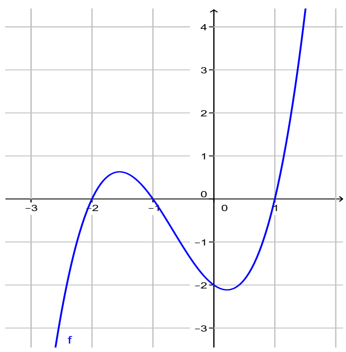
c. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad x \epsilon \left[-1, \frac{1}{2}\right]$

d. $f(x) = \frac{2}{x^2-1}, \quad x \epsilon\, [-2, 3]$

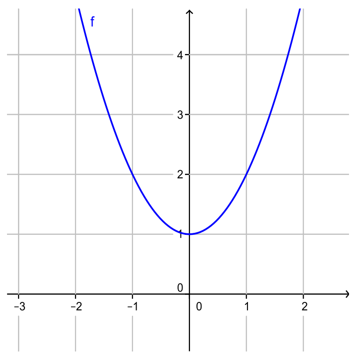
e. $f(x) = sen^2(x), \quad x \epsilon\, [-\pi, 3\pi]$

f. $f(x) = cos^2(\frac{x}{2}), \quad x \epsilon\, [0, 2\pi]$

Ejercicio 4.5. Dado el gráfico de $f\,'$. Indicar el intervalo de crecimiento y decrecimiento de f, y extremos relativos.



a.



b.

Ejercicio 4.6. Graficar, si es posible, una función f que cumpla:
- f sea continua en $\mathbb{R}$.
- Tenga un mínimo local en $x = -2$ y un máximo local en $x = 1$.
- La imagen sea el intervalo $[-2, 3]$

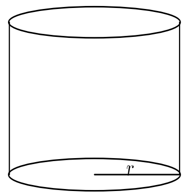
Ejercicio 4.7. Indicar la cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $x^7 + 3x^5 + 2x + 1 = 0$

b. $e^x = 1 - x$

Ejercicio 4.8. Sobre la orilla recta de un canal, se precisa limitar un terreno rectangular, alambrando los tres lados restantes. Hay que emplear 1800 m de alambre tejido . ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno, para que tenga área máxima?

Ejercicio 4.9. Hallar el radio y la altura de un cilindro circular recto para que la superficie sea mínima y tenga Volumen de 1000 cm^3. (Ayuda: volumen = área base x altura, área base = $\pi\, r^2$ y longitud base = $2\pi r$ con r el radio de la base)



Ejercicio 4.10. Con una hoja de cartulina de 80 cm de largo y 50 cm de ancho, se quiere construir una caja rectangular sin tapa, cortando cuadrados en las esquinas de la hoja. Calcular las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo.

Ejercicio 4.11. Dos móviles A y B se desplazan según las ecuaciones $s_A(t) = t^3 - 3t^2 + 4$ y $s_B(t) = t^2 - mt + n$. Calcular:

a. m y n para que en el instante $t = 4$, A y B se encuentren en el mismo lugar y lleven la misma velocidad.

b. La posición y velocidad en ese instante $t = 4$.

Ejercicio 4.12. (Optativo) Un techador quiere fabricar una canaleta abierta de capacidad máxima, cuya sección tenga forma de trapecio isósceles. El fondo y los laterales deben ser de 10 cm de ancho. ¿Cuál debe ser la anchura de la canaleta en la parte superior?

Ejercicio 4.13. Una pelota lanzada hacia arriba, al cabo de t segundos alcanza la altura $h(t) = 6 + 24t - t^2$.

a. Hallar la velocidad y la aceleración cuando $t = 2{,}4seg$

b. ¿A qué altura la velocidad se anula? Graficar h.

Ejercicio 4.14. (Optativo) Un barco se encuentra anclado a $9km$ del punto A más próximo a la costa. Es preciso enviar un mensaje a un campamento situado a $15km$ costa arriba de A. El mensajero, andando a pie, hace $5km/h$ y remando, $4km/h$. ¿En qué punto de la costa debe desembarcar para llegar al campamento en el menor tiempo posible?

4.2. Regla de L'Hopital

Ejercicio 4.15. Analizar en que ítems se puede usarse la regla de L'Hopital. Resolver cada límite con el método adecuado.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 0} [x. \ln(\sin(x))]$

f. $\lim\limits_{x\to 0} x. \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$

h. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$

i. $\lim\limits_{x\to \pi/2} [\tan(x)]^{2x-\pi}$

j. $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\cot(x-1)}$

k. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{1-\ln(x)}}$

l. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

m. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}$

n. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(x))^x$

Ejercicio 4.16. Encontrar todas las asíntotas (vertical, horizontal y oblicua) de la siguientes funciones f definidas por $y = f(x)$:

a. $f(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

b. $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$

c. $f(x) = \left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{x-3}}$

d. $f(h) = \frac{h}{e^h}$

e. $f(x) = (2x^2 - x^3)^{1/3}$

Ejercicio 4.17. Realizar el análisis completo de las siguientes funciones f definidas por $y = f(x)$ teniendo en cuenta lo indicado en el ejercicio 4.1:

a. $f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$

b. **(Optativo)** $f(x) = |x-3|e^{-x}$

4.3. Respuestas de la Práctica 4

Ejercicio 4. 1. a. Domf :R Imf: R
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-3,2)$
En $x=-3$ hay un máximo relativo y vale $\frac{29}{2}$
En $x=2$ hay un mínimo relativo y vale $\frac{-19}{3}$
En $\left(-\frac{1}{2};\frac{49}{12}\right)$ hay un punto silla.

b. Domf :R Imf: R
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-1,1)$
En $x=-1$ hay un máximo relativo y vale 3
En $x=1$ hay un mínimo relativo y vale -1
En (0,1) hay un punto silla.

c. Domf :R Imf: $[-33,+\infty)$
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $(-2,0)\cup(1,+\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty,-2)\cup(0,1)$
En $x=-2$ hay un mínimo relativo y vale -33
En $x=0$ hay un máximo relativo y vale -1
En $x=1$ hay un mínimo relativo y vale -6
En (-1,22; -19,36) y (0,55; -3,68) hay puntos silla.

d. Domf :$R-\{0\}$ Imf:$(-\infty,-4]\cup$ $[4,+\infty)$
Asíntota Vertical: $x=0$
Asíntota oblicua: $y=x$
Intervalo de crecimiento: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-2,0)\cup(0,2)$
En $x=-2$ hay un máximo relativo y vale -4
En $x=2$ hay un mínimo relativo y vale 4
No tiene puntos silla.

e. Domf :$R-\{1\}$ Imf:$(-\infty,0)$
Asíntota Vertical: $x=1$
Asíntota horizontal: $y=0$
Intervalo de crecimiento: $(1,+\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty,1)$
No tiene extremos
No tiene puntos silla

f. Domf :$(-\infty,9]$ Imf:$(-\infty,6\sqrt{3}]$
Asíntotas: no tiene
Intervalo de crecimiento: $(-\infty,6)$
Intervalo de decrecimiento:$(6,9)$

En $x = 6$ hay un máximo relativo y vale $6\sqrt{3}$
No tiene puntos silla.

g. Domf :R Imf:$[-1, +\infty)$
Asíntotas: No tiene
No existe la derivada de f en$x = 2$
Intervalo de crecimiento: $(0, 2) \cup (3, +\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty, 0) \cup (2, 3)$
En $x = 0$ hay un mínimo relativo y vale -1
En $x = 2$ hay un máximo relativo y vale 3
En $x = 3$ hay un mínimo relativo y vale 1
No tiene puntos silla.

h. Domf :$(0, +\infty)$ Imf:$[-3e^{-1}, +\infty)$
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $(e^{-1}, +\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(0, e^{-1})$
En $x = e^{-1}$ hay un mínimo relativo y vale $-3e^{-1}$
No tiene puntos silla.

i. Domf :R Imf:$[e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Intervalo de decrecimiento:$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$
En $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo relativo y vale $e^{-\frac{1}{4}}$
No tiene puntos silla.

j. Domf :R Imf:$[-1, \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}]$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Intervalo de crecimiento: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
En $x = -1$ hay un mínimo relativo y vale -1
En $x = \frac{1}{2}$ hay un máximo relativo y vale $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$
Tiene tres puntos silla: (-1.59; -0.62), (-0.34, -0.43), (0,93; 0,15) (resuelto con Geogebra).

k. Domf :$R - \{0\}$ Imf:$(0, 1) \cup (1, +\infty)$
Asíntota Vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 1$
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
No tiene extremos
Punto silla: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

l. Domf:$(0, +\infty)$ Imf: $\left(-\frac{1}{2}e^{-1}, +\infty\right)$
Asíntotas: No tiene
Intervalo de crecimiento: $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$
Intervalo de decrecimiento:$\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

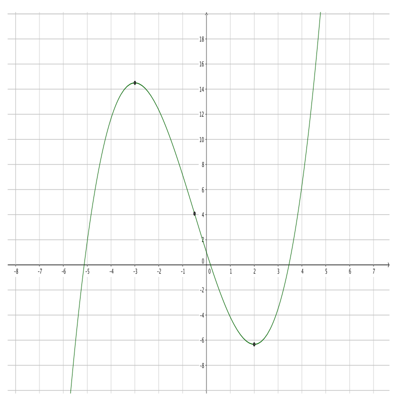
En $x = e^{-\frac{1}{2}}$ hay un mínimo relativo y vale $-\frac{1}{2}e^{-1}$
Punto silla: $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$.

m. Domf:R Imf: $(0, 1]$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 0)$
Intervalo de decrecimiento:$(0, +\infty)$
En $x = 0$ hay un máximo relativo y vale 1
Puntos silla: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

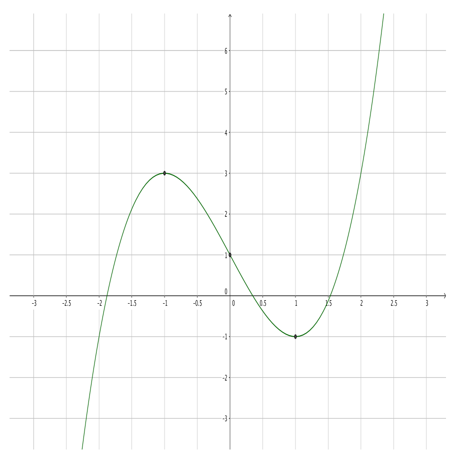
n. Domf :R Imf:$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
Asíntota vertical: No tiene
Asíntota horizontal: $y = 0$
Intervalo de crecimiento: $(-1, 1)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
En $x = -1$ hay un mínimo relativo y vale $-\frac{1}{2}$
En $x = 1$ hay un máximo relativo y vale $\frac{1}{2}$
Puntos silla: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $(0, 0)$.

ñ. Domf :$R - \{-1, 1\}$ Imf:$(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
Asíntota vertical: $x = -1$ y $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Intervalo de crecimiento: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
Intervalo de decrecimiento:$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
En $x = 0$ hay un mínimo relativo y vale 1
No tiene puntos silla.

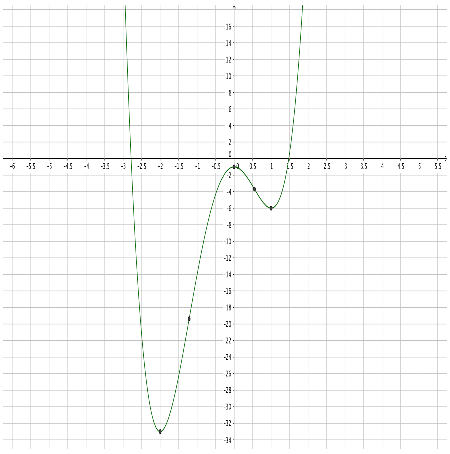
Gráficos



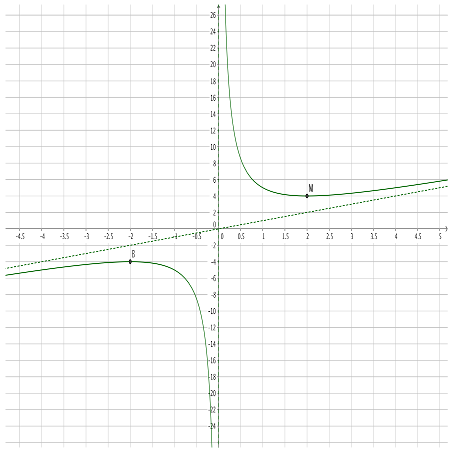
a.



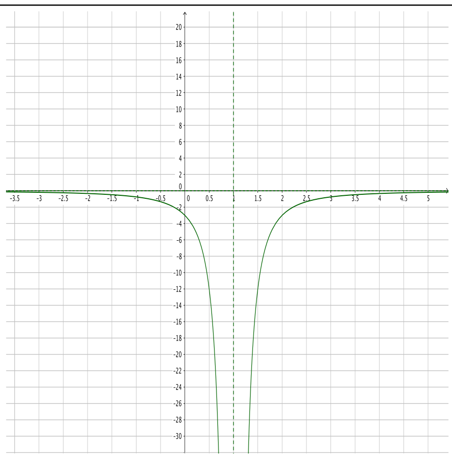
b.



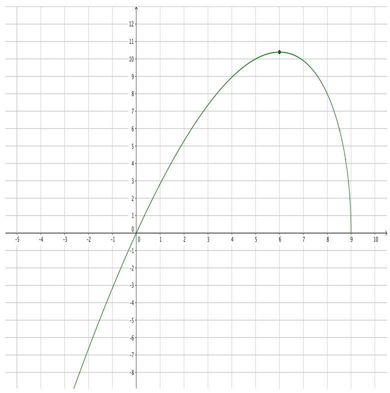
c.



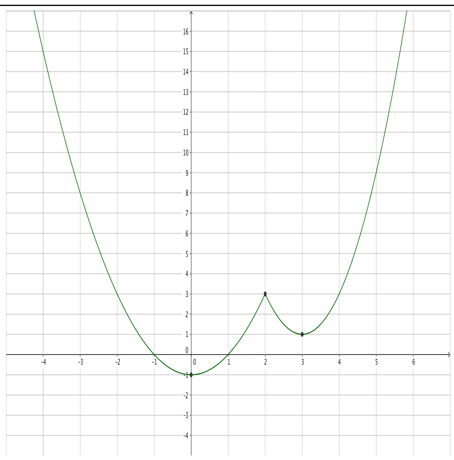
d.



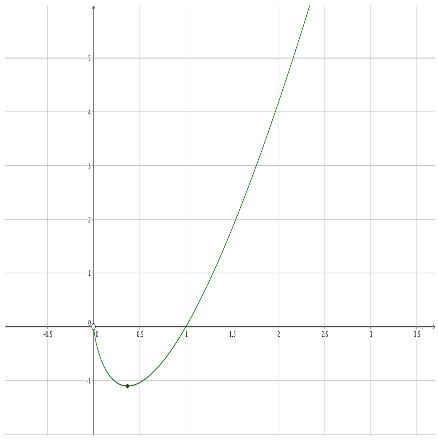
e.



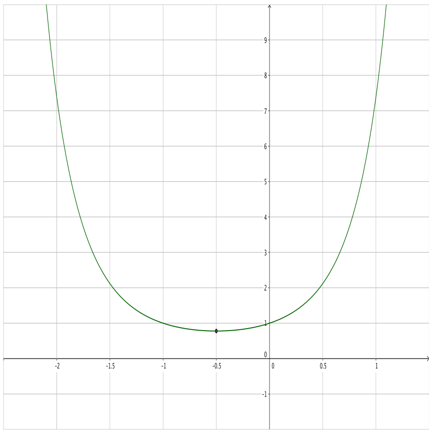
f.



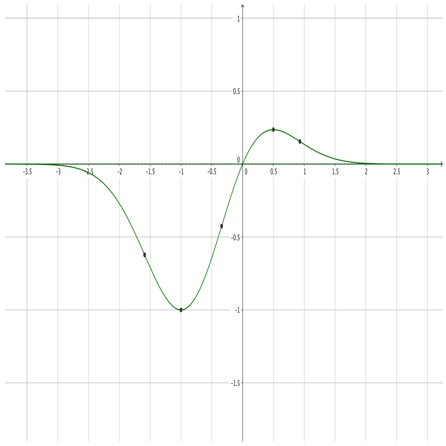
g.



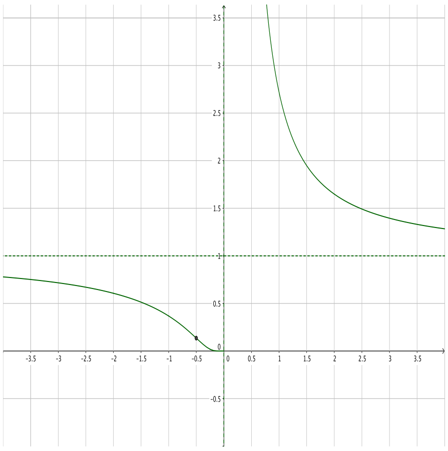
h.



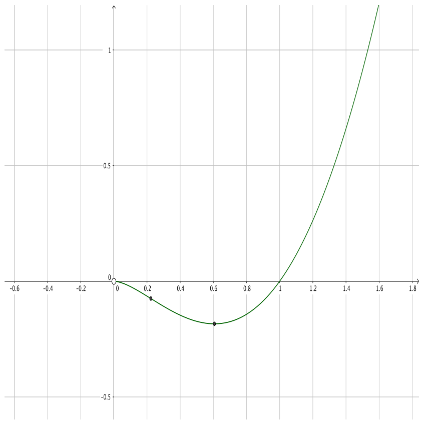
i.



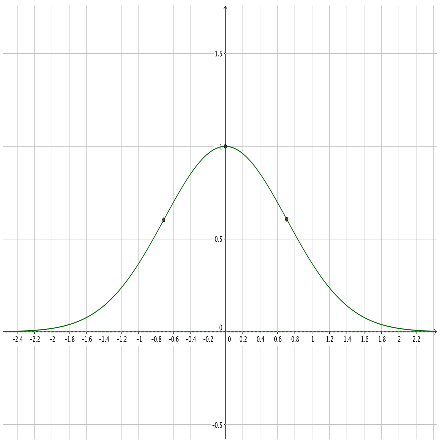
j.



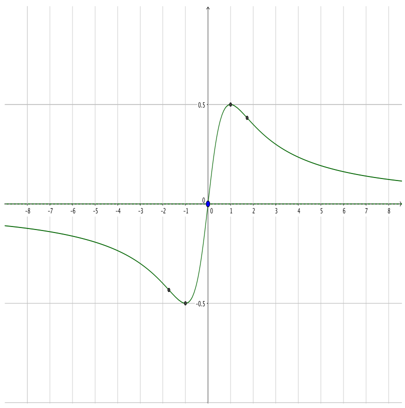
k.



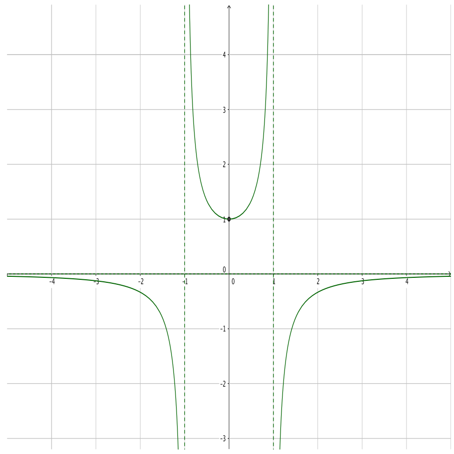
l.



m.



n.

ñ. 

Ejercicio 4. 2. Verificar con los graficos del ejercicio anterior.

Ejercicio 4. 3. a) Conc postiva: $(-1/2, +\infty)$ Conc neg: $(-\infty, -1/2)$
b) Conc positiva: $(0, +\infty)$ Conc neg: $(-\infty, 0)$
c) Conc posit. $(-\infty, -1,22) \cup (0,55, +\infty)$ Conc neg :$(-1,22, 0,55)$
d) Conc posit. $(0, +\infty)$ Conc neg: $(-\infty, 0)$
e) Conc posit : $\{\ \}$ Conc neg : $R - 1$
f) Conc posit : $\{\ \}$ Conc neg : $(-\infty, 9)$
g) Conc posit : R Conc neg : $\{\ \}$
h) Conc posit: $(0, +\infty)$ Conc neg: $\{\ \}$
i) Conc posit: R Conc neg: $\{\ \}$
k) Conc posit. $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$ Conc neg:$(-\infty, -1/2)$

Ejercicio 4. 4. a) $f(2^{1/2})$ es un mín absoluto. $f(3)$ es un máximo absoluto y $f(-2^{1/2})$ es un máximo relativo.
b) $f(2^{1/2})$ es un mín absoluto. $f(3)$ hay un máximo absoluto.
c) En $x = 2^{1/2} - 1$ hay un máximo absoluto. En $x = -1$ hay un mín absoluto.
d) $f(0)$ es un máximo relativo.
e) El máximo absoluto es 1 y se alcanza en $x = k\pi$ con $k \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. El mínimo absoluto es 0 y se alcaza en $x = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \{-1, 1, 3, 5\}$
f) En $x = \pi$ hay mínimo absoluto y vale 0. El máximo absoluto es 1 y se alcanza en $x = 0$ y en $x = 2\pi$.

Ejercicio 4. 5. a. Se puede deducir que la fórmula de la función es $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-2)$. El máximo relativo es $f(\frac{-\sqrt{13}-1}{3})$ y el mínimo relativo es $f(\frac{\sqrt{13}-1}{3})$. Luego, el intervalo de crecimiento es $(-\infty, \frac{-\sqrt{13}-1}{3})U(\frac{\sqrt{13}-1}{3}, +\infty)$ e intervalo de decrecimiento es $(\frac{-\sqrt{13}-1}{3}, \frac{\sqrt{13}-1}{3})$.
b. Según el gráfico se observa que el mínimo absoluto es $f(0) = 1$. El intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$ y el intervalo de decrecimiento es $(-\infty, 0)$.

Ejercicio 4. 6. Proponer un gráfico y compartirlo en el foro.

Ejercicio 4. 7. a. La ecuación dada tiene una solución en el intervalo (-1, 0).
b. La ecuación dada tiene una solución en el intervalo (-1, 1).

Ejercicio 4. 8.
Para que el área sea máxima, el rectángulo tiene que ser de 450m por 900m.

Ejercicio 4. 9. $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,41$

$h = \frac{1000}{\pi}(\frac{500}{\pi})^{-\frac{2}{3}} \approx 10,83$

Ejercicio 4. 10.

Para que el volumen sea máximo, la caja tiene que ser de 60cm x 30cm x 10cm.

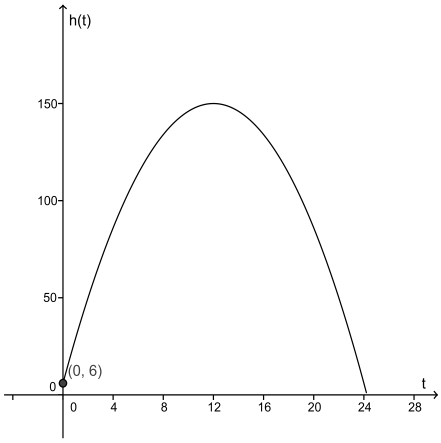
Ejercicio 4. 11. a. $m = -16$, $n = -60$

b. La posición de ambos móviles en $t = 4$ es 20 y la velocidad es 24.

Ejercicio 4. 12.

Ejercicio 4. 13. a. $v(2,4) = 19,2 \quad a(2,4) = -2$

b. $h = 150$



Ejercicio 4. 14.

Ejercicio 4. 15. a. 1

b. No existe el límite.

c. -1

d. 1/2

e. 0

f. No existe el límite

g. No se puede aplicar L'Hopital.

h. No se puede aplicar L'Hopital. El límite es 1.

i. 1

j. e^2

k. 1

l. 1

m. No se puede aplicar L'Hopital

n. 1

Ejercicio 4. 16.

a. A.V. por derecha: $x = 0$.

A.O.: $y = x + \frac{1}{2}$.

b. No tiene asíntotas

Ejercicio 4. 17. a. Domf:$(-1,0) \cup (0,+\infty)$

Asíntota vertical: No hay.

No tiene asíntota horizontal ni oblicua.

Intervalo de crecimiento: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
No tiene extremos.