Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
NOTAS SOBRE DERIVADAS

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino
Silvina De Duca
Silvia Vietri

Índice general

2. Derivadas **2**
2.1. Importancia . . . 2
2.2. Pendiente de la recta tangente . . . 3
2.2.1. Análisis del significado de recta tangente . . . 3
2.2.1.1. Algunas precisiones . . . 6
2.2.1.2. Un poco más de idea intuitiva . . . 9
2.3. Derivada: definición formal . . . 10
2.3.1. No existencia de la derivada . . . 12
2.4. Función derivada . . . 13
2.4.1. Utilidad . . . 14
2.4.2. Algunos teoremas . . . 15
2.4.3. Reglas prácticas . . . 19
2.4.4. Propiedades de las funciones derivadas . . . 20
2.4.5. Regla de la cadena . . . 25
2.4.5.1. Regla práctica para aplicar regla de la cadena . . . 26
2.4.6. Derivadas de funciones potenciales-exponenciales . . . 27
2.5. Recta tangente . . . 28
2.5.1. Recta normal . . . 30
2.6. Velocidad instantánea . . . 31
2.7. Derivadas sucesivas . . . 32
2.7.1. Aceleración . . . 35
2.8. Derivadas de funciones implícitas . . . 35
2.9. Derivadas de funciones inversas . . . 37
2.10. Diferencial de una función . . . 39

Notas para Práctica 2

Derivadas

2.1. Importancia

Las derivadas conformarán una herramienta muy importante tanto para estudiar el comportamiento de funciones como para hacer aproximaciones de las mismas. Por otro lado, resultan de sumo interés debido a que se utilizan en una gran cantidad de aplicaciones en distintas áreas de la ciencia y la vida. A continuación se detallan algunos ejemplos, los cuales se estudiarán a los largo del éste y el próximo capítulo.

- Se pueden aplicar para analizar distintos tipos de variaciones, por ejemplo la variación de temperatura en una placa o la variación de la carga que se acumula en un capacitor. También se usan para el cálculo del error cometido en determinada medición y para calcular valores óptimos que permitan responder a preguntas como: ¿cuánto hay que producir para minimizar costos o maximizar ganancias?, ¿cuáles son las medidas óptimas para producir determinado producto?

- Es mucho más sencillo trabajar con una función lineal en lugar de hacerlo con una función más compleja. Si bien el gráfico de una función lineal es muy disímil al de una función exponencial, por tomar un ejemplo, cerca de un punto de interés a analizar, se comportarán de forma similar. En este caso estaremos aproximando una función mediante otra.

- La información de la derivada nos facilita el estudio de una función, ya que permite hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otras cosas.

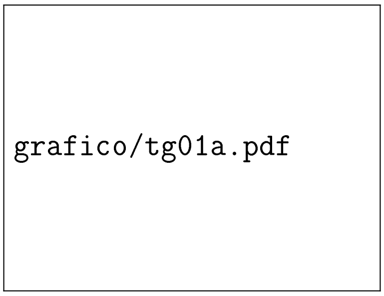


Figura 2.1: *Recta que pasa por dos puntos.*

2.2. Pendiente de la recta tangente

El concepto de derivada se asocia, geométricamente, con el de recta tangente al gráfico de una función. Entonces, primero se necesita definir qué es una recta tangente. Vamos a analizar intuitivamente que es una recta tangente hasta lograr formalizarlo.

2.2.1. Análisis del significado de recta tangente

Calculemos la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, digamos $A = (1, 1)$ y $B = (7, 4)$ (ver gráfico 2.1) ¿Qué cuenta debemos realizar? Si trazamos una recta paralela al eje x que pase por el punto A, y otra paralela al eje y, que pase por el punto B, podremos armar un triángulo rectángulo como vemos en el gráfico 2.2a. Proyectando los catetos de este triángulo sobre los ejes coordenados obtenemos: un segmento sobre el eje y, y otro sobre el eje x, como vemos en el gráfico 2.2b. Y recordando funciones lineales, el valor de la pendiente de la recta lo obtenemos al dividir las diferencias entre los valores de y, sobre las diferencias de los valores de x, como se detalla a continuación.

- Para obtener la diferencia de los valores que toma la y, hacemos la resta entre y_2 e y_1. En este caso $4–1 = 3$. Para las diferencia de los valores de x, restamos x_2 y x_1: $7–1 = 6$. Finalmente, hacemos la división: $m = 3/6 = 1/2$.

Generalizando la idea, si a los valores de la y los llamamos y_1 e y_2, y a los de la x los llamamos x_1 y x_2. La cuenta que antes realizamos la podemos escribir de la siguiente manera:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora, supongamos que esos dos puntos (A y B) son puntos que pertenecen al gráfico de una determinada función f (ver la imagen 2.3). Por lo tanto, los grafico/tg01b.pdf

(a) *Recta que pasa por la hipotenusa*

grafico/tg01c.pdf

(b) *proyección de los catetos del triángulo sobre los ejes coordenados*

Figura 2.2

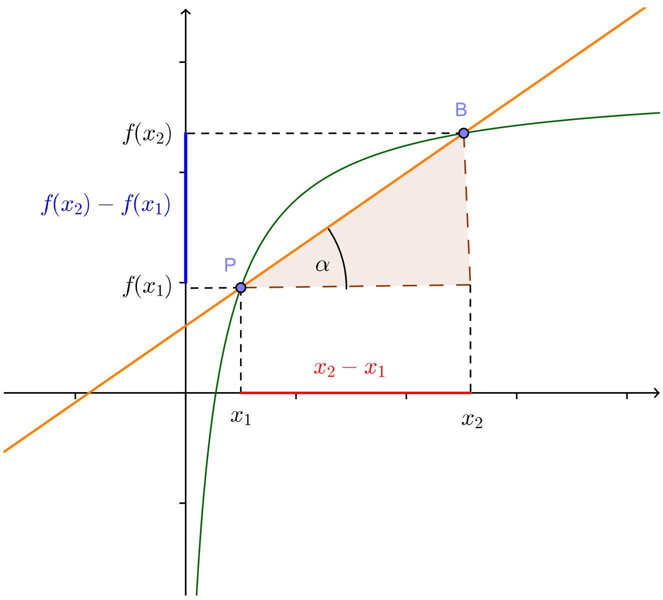


Figura 2.3: *Recta secante.*

valores que toma la y serán los valores que toma la función para los dos *equis* determinados. Entonces, la cuenta que planteamos antes queda de esta forma:

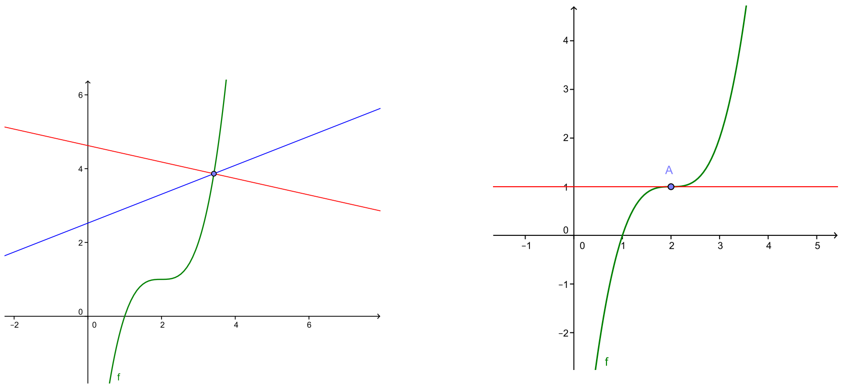
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esta recta se llama recta secante, sin embargo en nuestro estudio nos va a interesar la recta tangente. En este momento nos hacemos algunas preguntas:

1. ¿Cuál es entonces la recta tangente?

2. ¿La recta secante corta a la función en dos puntos y la recta tangente en uno solo?

3. Si la recta tangente toca al gráfico de la función en un solo punto, ¿cómo hacemos para calcular su ecuación, dado que una recta se determina por dos



(a) *Dos rectas que cortan al gráfico en un sólo punto y no son tangentes a la curva.*

(b) *La recta tangente corta al gráfico.*

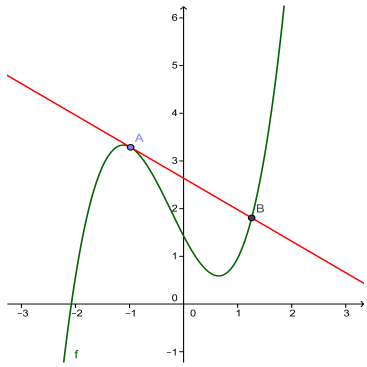
Figura 2.4

puntos y no por uno?

Dejaremos por el momento pendientes la primera y la última pregunta, y responderemos en parte a la segunda. Es cierto que una recta secante corta a una curva en, por lo menos, dos puntos. En cambio, que la tangente corte al gráfico de la función en un solo punto no siempre es verdadero. Hay que tener cuidado porque en muchos libros y apuntes figura esto como definición de recta tangente, sin embargo, es falso. Veremos algunos ejemplos en donde esto no se cumple tratando de responder a la primera pregunta.

En la 2.4a, ambas rectas cortan al gráfico de f en un solo punto, el punto A. Sin embargo, ninguna de las dos es una recta tangente. Se podría pensar que una recta tangente no debe "cortar" al gráfico de la función, es decir, atravesar de un lado a otro. Sin embargo, esto también es falso como se observa en el gráfico 2.4b. En este gráfico la recta atraviesa al gráfico de la función f en el punto A y, esta recta sí es tangente al gráfico de f en dicho punto. Entonces, hasta el momento vimos rectas que cortan en un punto a una función, y algunas son tangentes y otras no.

Ahora observemos el gráfico 2.5a, la recta L es tangente al gráfico de la función f en el punto A, pero vemos que corta a la función en otro punto, el B. Por otro lado, en la figura 2.5b vemos que las dos rectas rozan al gráfico de la función en el punto A, sin embargo, ninguna de esas dos rectas son tangentes a dicho gráfico. Es más, esta función no admite recta tangente en ese punto.



(a) *Recta tangente que corta a la curva en dos puntos.*

grafico/tg4c2.pdf

(b) *Dos rectas que rozan a la curva en un punto pero no son tangentes.*

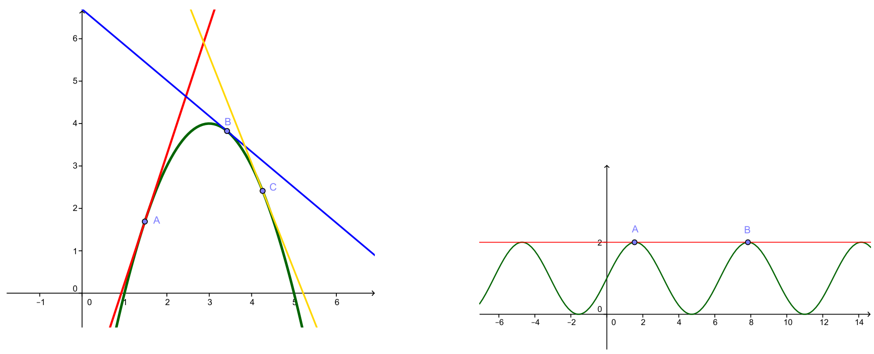
Figura 2.5

2.2.1.1. Algunas precisiones

Vimos varios ejemplos donde la idea tan simplista de pensar que una recta tangente es la que toca solo en un punto al gráfico de una función no es cierta. Vimos cómo rectas que solo tocan en un punto al gráfico de una función no son tangentes y, por el contrario, otras que cortan en dos puntos (podrían ser más) son tangentes. Precisando un poco más debemos aclarar algunas cuestiones:

- El gráfico de una función puede admitir o no recta tangente en un determinado punto.
- Si el gráfico de una función tiene recta tangente en un punto, esta recta es única (no puede haber más de una).
- El gráfico de una función puede tener distintas rectas tangentes en diferentes puntos.
- El gráfico de una función puede tener recta tangente en algunos puntos y, en otros, no.

Por ejemplo, en la figura 2.5b que hemos visto anteriormente, observamos que el gráfico de la función f admite recta tangente en todos los puntos, salvo en el punto A. En cambio, en la figura 2.6a vemos que el gráfico de la función f tiene una recta tangente en el punto A, otra en el punto B y otra en el punto C. Una función de este estilo admite recta tangente en todos los puntos de su gráfico (en los infinitos puntos) y, todas esas rectas, son distintas. Por el contrario, en la figura 2.6b, tenemos dos puntos distintos, A y B, en donde la recta tangente al gráfico de la función es la misma.



(a) *Rectas tangentes en diferentes puntos de un mismo gráfico.* (b) *La misma recta es tangente al mismo gráfico en diferentes puntos.*

Figura 2.6

Ahora daremos una idea intuitiva de lo que es una recta tangente que salvo alguna excepción funciona bien.

Pensemos al gráfico de una función como un camino (por supuesto que los gráficos no tienen ancho y un camino sí, pero nos estamos abstrayendo). Imaginemos que, por ese camino o autopista se mueve un auto (vamos a llamarlo *auto1*) en el sentido de izquierda a derecha mirando el eje x. En el punto en donde queremos graficar la recta tangente (en el punto C), a ese auto se le rompe la dirección, es decir, continua en línea recta con la dirección en que se movía. De esta forma, el *auto1* sigue por una recta. Ahora hay que imaginar lo mismo pero con otro auto (*auto2*) que viene en sentido inverso, de derecha a izquierda. También, en el mismo punto, a este *auto2* se le romperá la dirección y se desviará por una recta. Si la recta por donde salió el *auto1* es la misma que la del *auto2* (aunque van a ir en sentido opuesto), esa es la recta tangente. Si son diferentes decimos que no tiene recta tangente en ese punto. Miremos la 2.7, el punto A sería nuestro auto1 que se va moviendo de izquierda a derecha, hacia el punto C. El punto B representaría al *auto2* que se mueve, también hacia C pero de derecha a izquierda. En el punto C, A seguiría con la dirección hacia arriba, por la recta inclinada. En cambio B seguiría hacia la izquierda en forma horizontal. Vemos que estas rectas no son las mismas, por lo tanto, este gráfico no admite recta tangente en ese punto (el C).

Algunas precisiones más:

- Si la recta por donde salen despedidos esos móviles tiene que ser la misma, concluimos que el gráfico debe ser continuo. Es decir, en el punto que nos interesa, no puede haber cortes ni saltos.

- De lo anterior podemos afirmar que, para que el gráfico de una función acepte recta tangente en un punto, la función debe ser continua en dicho punto.

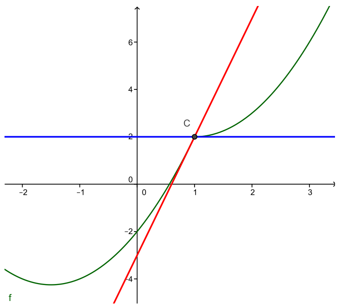


Figura 2.7: *Dos rectas distintas para un mismo punto. Por lo tanto, no existe recta tangente en ese punto.*

- También, el punto debe ser interior al dominio. Es decir, no podríamos calcular la recta tangente de una función en un borde porque no nos podríamos mover del otro lado.

- Vimos que la función debe ser continua para que tenga recta tangente pero ¿sólo alcanza con eso? No. En el punto C de la 2.7, la función es continua, sin embargo las rectas no coinciden. Los puntos donde vemos que esas rectas no coinciden son puntos donde el gráfico de la función presenta algún cambio brusco del sentido, formando un quiebre o algún borde filoso.

- ¿En qué se relaciona todo esto con la derivada? Una recta tangente, como cualquier recta (salvo la vertical) tendrá una ecuación de esta forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente de esa recta. Cuando calculemos la derivada de una función, en un punto, ese cálculo nos dará dicha pendiente. Es decir, si la derivada de una función existe en un punto, en ese punto existirá la recta tangente al gráfico de la función, y la pendiente de esa recta será el valor de la derivada.

Pero, ¿está idea funciona simple? La respuesta es no. Habíamos dicho que había algunos casos donde la idea de los móviles que se salen del camino no funcionaba. Es el caso de la figura 2.8. Si aplicamos la misma idea, en $x = 0$ sucede lo siguiente:

El móvil que viene por la rama izquierda del cero, moviéndose de izquierda a derecha, en dicho punto continuará por la recta vertical hacia arriba. Y el móvil que se mueva por la rama derecha de la función, acercándose al cero por la rama derecha, saldrá por la misma recta, hacia abajo.

Por lo tanto, si existiera la recta tangente sería la recta vertical, de ecuación $x = 0$, pero esta recta tendría pendiente infinita, ya que de una recta vertical se dice que su pendiente es infinita, pero esto no es un valor. En conclusión, diremos que no existe recta tangente; más adelante veremos esto en forma analítica.

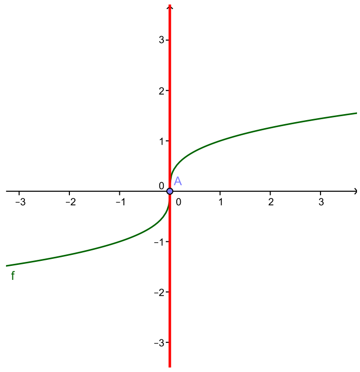


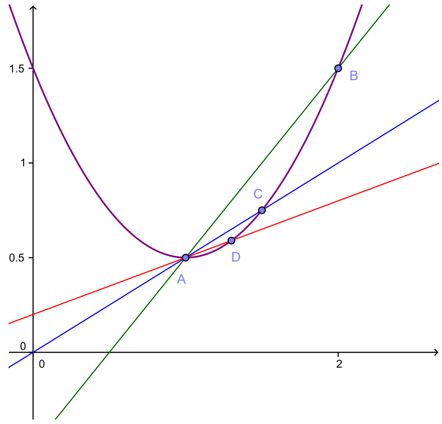
Figura 2.8: Recta tangente vertical (pendiente infinita): $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2.2.1.2. Un poco más de idea intuitiva

Ahora volvemos a la pregunta 3 que nos habíamos hecho y trataremos de responderla: ¿cómo calcular la pendiente de esa recta si necesitamos dos puntos y tenemos uno solo? Sigamos con esta idea informal de los dos móviles que se mueven y trataremos de calcular el valor de la pendiente de una recta tangente con un ejemplo puntual. Elegiremos como función $f(x) = (x-1)^2 + 0{,}5$ y el punto donde queremos calcular la pendiente de la recta tangente tendrá la abscisa $x_0 = 1$. Entonces, el punto lo llamaremos A y estará formado por $A = (x_0, f(x_0)) = (1, f(1)) = (1; 0,5)$. Lo que haremos es calcular la pendiente de algunas rectas secantes que pasen por dicho punto. Eso lo sabemos hacer porque contamos con dos puntos, como por ejemplo el $B = (2; f(2)) = (2; 1,5)$. Como ya vimos, restamos los valores de las y, hacemos lo mismo con las x y lo dividimos: $m = \frac{1{,}5-0{,}5}{2-1} = 1$. Pero, imaginamos que el móvil (el auto) se empieza a mover hacia el punto A. Si bien no podríamos hacer este cálculo con el mismo punto A porque nos quedaría una división por cero, sí podemos hacer el cálculo con puntos muy cercanos al punto A. En la tabla que está en el gráfico 2.9a se muestran estos cálculos y en el gráfico 2.9b se puede observar dos de esas rectas secantes. Mirando la tabla vemos que las pendientes se acercan al valor 0.

Si ahora hacemos una tabla similar para el móvil que viene del otro lado, podemos observar que también se acerca a dicho valor. Como dijimos que debería ser la misma recta, es correcto que nos de el mismo valor. Esto lo podemos observar en la tabla 2.1. Efectivamente, también se acercan al valor 0. Por lo tanto, podríamos concluir que la pendiente de la recta tangente, será $m = 0$. Lo que es equivalente a decir que la derivada, en dicho punto, toma ese valor. Aunque todavía esto es grafico/tabla 1.png

(a)



(b)

Figura 2.9

x_o	$f(x_o)$	m
0	1.5	
0,2	1,14	-1,8
0,4	0.86	-1,4
0,6	0.66	- 1
0,8	0.54	- 0.6
0,9	0.51	-0.3
0,99	0.5001	-0.11
0,999	0.500001	- 0.011
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0.5	

Tabla 2.1

muy informal ya que el número 0 es un número que estamos observando, pero no sabemos si es, exactamente, ese número.

2.3. Derivada: definición formal

En la subsección 2.2.1.2, vimos, de modo informal, que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ al gráfico de f era 0. ¿Cómo lo haríamos de manera formal? Vemos que, al acercarse un punto al otro, estamos tomando un límite: el límite cuando C se acerca a A. Pero ¿cómo lo escribimos de manera formal? Al punto donde queremos calcular la pendiente de la tangente lo llamaremos x_0 en lugar de x_1. En este caso, $x_0 = 1$. Y el segundo x, al que llamábamos x_2, lo pensaremos como que es el x_0 más un corrimiento, que llamaremos h. Por lo tanto, lo que queremos, es que ese corrimiento se vaya achicando, es decir, ese h tiene que tender a cero.

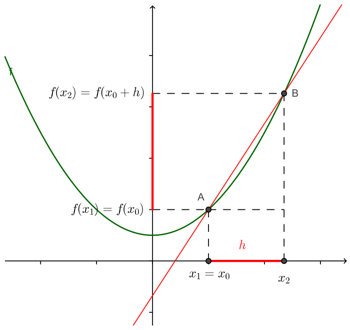


Figura 2.10: *Descripción de notación.*

Como vemos en la 2.10.

Por lo tanto queda:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (2.1)$$

Reemplazando el x_0 por 1:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Si hacemos tender el h a cero nos queda una indeterminación del tipo "0/0". Por lo tanto, debemos desarrollar este límite remplazando con la función:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h - 1)^2 + 0{,}5 - 0{,}5}{h}$$

Que sigue siendo una indeterminación. Desarrollamos, y luego simplificamos, y nos queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

Que era lo que esperábamos por los cálculos provisorios que habíamos hecho. Por lo tanto, ahora confirmamos, de manera formal, el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en $x = 1$. El resultado del límite de la igualdad 2.1 se denomina *derivada de f en el valor del dominio* x_0. Por lo tanto, la derivada nos da el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto donde se calcula. En nuestro ejemplo, la derivada que geométricamente es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en $x = 1$ es 0. La notación para la derivada en dicho punto será: $f'(1) = 0$. Entonces, la derivada de una función f en un x_0 genérico del dominio de f es la siguiente:

> **Definición.** Sea $f : A \subset R \to R$ y x_0 es un punto interior a su dominio (interior a A). Entonces, si existe el siguiente límite,
>
> $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
>
> diremos que es el valor de la derivada de f en ese punto.

Observación. Se debe tener en cuenta que, si bien en el gráfico se tomó un h positivo para representarlo, este valor de h tiende a cero tanto por izquierda como por derecha.

2.3.1. No existencia de la derivada

Hemos visto cómo algunas funciones no tenían recta tangente en algún punto en particular. Veamos qué pasaría si quisiéramos calcular el límite indicado en la definición. Por ejemplo, el de la figura 2.7 donde se tiene una función partida, para ciertos valores de x tiene una fórmula y otra para otros. La fórmula que describe ese gráfico es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1)(x+2) - 4 & si\ x < 1 \\ (x-1)^2 + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Como queremos calcular el valor de la derivada de f en $x = 1$ hacemos el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Sabemos que el valor de f en $x = 1$ es 2, pero el límite se abre en dos posibilidades, ya que depende del valor de h. Si h es positivo usaríamos la fórmula que está en la segunda línea para hacer el cálculo, en cambio, si h es negativo, la de la primera. Por lo tanto, tenemos que si $h > 0$, entonces

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h-1)^2 + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0.$$

Si $h < 0$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)(1+h+1)(1+h+2)-4-2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^3+6h^2+11h+6-6}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h^2+6h+11)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} (h^2+6h+11) = 11$$

Como $11 \neq 0$ este límite no existe, por lo tanto, la derivada de f en $x = 1$, tampoco. Con lo cual, la recta tangente en ese punto no existe. Cabe destacar que esto era lo que habíamos visto en el gráfico: si nos movíamos de izquierda a derecha (en este caso h es negativo) la recta por donde el supuesto móvil continuaría era hacia arriba con una inclinación muy pronunciada. En este caso el límite dio 11. Por el contrario, si nos movíamos de derecha a izquierda (con h positivo) la recta era horizontal, concordando este resultado con los cálculos previos, ya que el límite lateral por derecha nos dio cero.

Otro caso particular que habíamos visto era el de la función raíz cúbica, en el valor $x = 0$: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Calculemos la derivada en $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\propto\end{aligned}$$

Nos da infinito positivo dado que la h – sea positiva o negativa – queda elevada al cuadrado. Por lo tanto, este límite, tampoco existe. Era lo que esperábamos viendo el gráfico: la pendiente debía dar infinito. Como se ha mencionado, en algunos textos indican que la recta tangente tiene pendiente infinita ya que su derivada nos dio infinito. Sin embargo, a los efectos prácticos, la derivada no existe.

2.4. Función derivada

Como se comentó anteriormente, la gráfica de una función puede tener distintas rectas tangentes (una en cada punto). Y cada recta tendrá asociada una pendiente distinta, es decir, en cada punto la derivada nos dará diferente. Entonces, podríamos querer calcular la derivada de una función en un x_0 genérico. Si lo hacemos en particular con la función $f(x) = x^2 + 1$, quedaría:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+1-(x_0^2+1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2+1-x_0^2-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x_0+h)\\
&= 2x_0
\end{aligned}
$$

Entonces, concluimos que la derivada genérica de la función en cierto $x = x_0$ es $2x_0$. Pero como esto sucede para cualquier x_0, entonces:

$$f'(x) = 2x$$

Por lo tanto, podemos definir la función derivada como una nueva función de x. En este caso es una función lineal.

2.4.1. Utilidad

¿Por qué nos interesa analizar la derivada de una función? Porque con las derivadas y sus rectas tangentes podemos analizar gran parte del comportamiento de una función que, de otra forma, podría ser muy difícil, como decíamos al principio de la unidad. De la recta tangente podemos observar lo siguiente:

- La función y la recta tangente comparten por lo menos un punto, que es donde se calcula su recta tangente en cierto valor de x. Es decir que los valores de x y de y son iguales en dicho punto. Esto es muy importante y lo utilizaremos bastante. Hay que tener presente que la recta "toca" a la función en ese punto, si no, no sería tangente.

- Alrededor del punto, en los puntos muy cercanos a donde calculamos la recta tangente, la función y su recta tangente, tienen valores similares. Lo cual nos va a ser útil a la hora de encontrar aproximaciones de una función.

- Más adelante se verá que utilizando la función derivada podremos calcular extremos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, entre otras cosas.

2.4.2. Algunos teoremas

Teorema 2.1. *Si f es derivable en un punto a, entonces f es continua en dicho punto.*

Este teorema es muy fuerte y lo usaremos bastante. Su idea conceptual ya la habíamos enunciado viendo los distintos gráficos, ya que nos dice que si la función es derivable en un punto, o sea, admite recta tangente en ese punto, entonces será continua en dicho punto. Es decir, el gráfico no puede tener «agujeros» ni «saltos». En lenguaje matemático, el teorema se puede escribir de la siguiente forma:

$$f'(a) = c \Rightarrow f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Antes de ver la demostración daremos otra definición de derivada que es similar pero tiene una notación levemente diferente. En lugar de utilizar x_0 usaremos a. Diremos que $x = x_0 + h = a + h$, entonces $h = x - a$, y cuando x tiende al valor a, h tiende a 0. Por lo tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Demostración. Se plantea la siguiente igualdad:

$$f(x) - f(a) = [f(x) - f(a)] \cdot 1 = [f(x) - f(a)] . \frac{x - a}{x - a}$$

pidiendo que $x \neq a$. Entonces, tomamos límites en ambos lados:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] . \frac{x - a}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . (x - a) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . \lim_{x\to a} (x - a) = c \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

De donde concluimos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) - b = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$b = \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

lo cual significa que f es continua en el punto a. □

Hay que tener cuidado porque la proposición inversa no siempre se cumple: si grafico/der01.jpg

Figura 2.11

es continua, *puede o no* ser derivable. En un diagrama de Venn se verá mejor.

Supongamos que dentro del rectángulo se encuentran todas las funciones que van de un dominio incluido en los reales y nos devuelven un número real, es decir, infinitas funciones de R en R. Hay algunas, como la función f que no es ni continua ni derivable en todo su dominio (estamos suponiendo algo genérico, ya que una misma función podría ser derivable en algunos puntos y en otros no, pero globalmente sería no derivable por eso es importante que hablamos de todo su dominio).

En la bolsa de más pequeña, están las derivables. Pero esa bolsa está dentro de otra bolsa más grande: la bolsa de las continuas. Por ejemplo, la función g por estar dentro de las derivables, forzosamente, está dentro de las continuas. En cambio, en la bolsa de las continuas, pero fuera de la bolsa de las derivables, tenemos la función h que, si bien es continua, no es derivable. A partir del teorema enunciado podemos usar el contrarecíproco del mismo:

si una función no es continua en un punto, entonces en ese punto no puede ser derivable.

Teorema 2.2. *Si f es una función constante, entonces su función derivada es 0.*

En lenguaje matemático,

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Demostración. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k-k}{h} = 0$ □

Hay que tener cuidado porque el límite anterior no es una indeterminación de tipo "0/0". El numerador es exactamente igual a 0, mientras que el denominador solo tiende a 0. Es decir que 0 dividido un número muy chico pero que no es 0, da como resultado 0.

Teorema 2.3. *Si f es la función identidad, entonces su función derivada es 1.*

En lenguaje matemático,

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1.$$

Demostración. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$ □

Teorema 2.4. *Si $f(x) = x^n$, con $n \in N$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.*

La demostración sale en forma relativamente sencilla mediante inducción, sin embargo excede los objetivos de este texto. Más adelante, en las reglas prácticas, se verá que esta propiedad se puede extender a exponentes que no solo sean naturales, sino a todos los reales, cuya demostración es bastante más compleja.

Teorema 2.5. *Si $f(x) = sen(x)$, entonces $f'(x) = cos(x)$.*

Demostración. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$. Utilizando la propiedad trigonométrica:

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a).$$

Nos queda:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h)+sen(h)cos(x)-sen(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h)-sen(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)cos(x)}{h}\end{aligned}$$

Nos quedan dos límites indeterminados que llamaremos A y B, los cuales asumimos que existen, de lo contrario la igualdad no tendría sentido. Veamos A:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h)-sen(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[cos(h)-1\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[cos(h)-1\right]}{h} \cdot \frac{\left[cos(h)+1\right]}{\left[cos(h)+1\right]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[cos^2(h)-1\right]}{h\left[cos(h)+1\right]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[1-sen^2(h)-1\right]}{h\left[cos(h)+1\right]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[sen^2(h)\right]}{h\left[cos(h)+1\right]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)sen(h)sen(h)}{h\left[cos(h)+1\right]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)sen(h)}{\left[cos(h)+1\right]} . \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \\ &= \frac{0}{2} \cdot 1 = 0 = A\end{aligned}$$

Veamos B:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)cos(x)}{h} &= cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\\ &= cos(x)\cdot 1 = cos(x) = B\end{aligned}$$

Conclusión:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = A + B = 0 + cos(x) = cos(x)$$

$\square$

Nota. No es la única forma de demostrar el límite anterior, hay otras propiedades trigonométricas que se pueden utilizar.

Teorema 2.6. *Si $f(x) = cos(x)$, entonces $f'(x) = -sen(x)$.*

La demostración es similar a la anterior.

Teorema 2.7. *Si $f(x) = ln(x)$, entonces $f'(x) = 1/x$.*

Demostración. Primero se plantea la definición de derivada para un valor arbitrario x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}$$

Si se saca el h que está dividiendo a un costado se pueden utilizar propiedades logarítmicas:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}.\left[ln(x+h)-ln(x)\right]\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}.ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)\\ &= \lim_{h\to 0} ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \lim_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \lim_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{h}{x}\cdot\frac{1}{h}}\\ &= \lim_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}\\ &= ln(e)^{1/x} = \frac{1}{x}ln(e)\\ &= \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.8. *Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.*

Demostración. Escribimos la definición de derivada $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$. Aplicando propiedades de exponenciales:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\end{aligned}$$

Ahora se calcula este límite haciendo un cambio de variable: $t = e^h - 1$, entonces $h = ln(t+1)$, y cuando h tiende a 0, t también tiende a 0. Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{ln(t+1)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{ln(t+1)}{t}}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{ln(t+1)^{1/t}}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{ln(e)} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

□

2.4.3. Reglas prácticas

Como el cálculo de los límites es bastante trabajoso y molesto, por suerte, Newton y Leibniz se nos adelantaron y dedujeron algunas reglas básicas para el cálculo de las derivadas. Las primeras reglas consisten en una tabla de derivadas que se puede utilizar siempre y cuando la función no presente problemas en el punto donde deseamos calcular. Por ejemplo, si es una función partida y queremos hallar su derivada en el punto de corte, esta regla práctica no nos servirá y deberemos calcularla por definición, es decir, tomando límites como hicimos en los ejemplos vistos.

Ejemplo 2.1. Derivar las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^4$

   Acá directamente miramos la tabla: $f'(x) = 4x^3$.

2. $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$

   Antes de derivar escribimos la función como x elevado a un número: $f(x) = x^{7/5}$. Entonces: $f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$

$f(x)$	$f'(x)$
k (k es un número real)	0
x^n(n es un número real)	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Tabla 2.2: Tabla de Derivadas

3. $f(x) = \sqrt{x}$

   Antes de derivar escribimos la función como x elevado a un número: $f(x) = x^{1/2}$. Entonces: $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $f(x) = 1/x$

   Antes de derivar escribimos la función como x elevado a un número: $f(x) = x^{-1}$. Entonces: $f'(x) = -1.x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

2.4.4. Propiedades de las funciones derivadas

Propiedad 2.9. ***Suma o resta de funciones.*** *Si f y g son derivables en a, y una función h es la suma (o resta) de estas dos funciones, entonces h será derivable en a y su derivada en dicho punto será la suma (o resta) de las derivadas de f y g en ese punto. En símbolos:*

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow h'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

Esta propiedad y las que siguen se pueden extender a un intervalo de puntos siempre y cuando se conserve la derivabilidad de cada función. Entonces, dado un valor x cualquiera donde f y g son derivables, nos queda que:

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 + ln(x) \Longrightarrow f\,'(x) = 2x + 1/x$. Esta regla se generaliza para más de dos funciones.

Demostración. Se hace solo con la suma, debido a que con la resta es análoga. Como la función se llama h, se cambió h por t en la definición de la derivada para no confundir la variable h con la función.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
h'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(f+g)(x+t) - (f+g)(x)}{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) + g(x+t) - f(x) - g(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x) + g(x+t) - g(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

□

C:/Users/Andy/Dropbox/derivadas/1_Limite y continuidad/graficos LyC/advertencia

Nota. El límite anterior pudimos separarlo como la suma de dos límites sabiendo que existían, ya que tanto f como g son derivables por hipótesis.

Propiedad 2.10. ***Producto de funciones***. *Dada una función formada por el producto de dos funciones derivables, $h = f \cdot g$. Si f y g son derivables en un valor x en el dominio de h, se cumple que:*

$$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

Ejemplo. $f(x) = x^2\, ln(x) \Longrightarrow f'(x) = 2x\, ln(x) + x^2 \frac{1}{x} = 2x\, ln(x) + x.$

Demostración. Sea $h(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$, entonces se plantea la definición de derivada.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{h(x+t)-h(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(f.g)(x+t)-(f.g)(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t).g(x+t)-f(x).g(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t).g(x+t)-f(x).g(x)+g(x+t)f(x)-g(x+t)f(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)\left[f(x+t)-f(x)\right]+f(x)\left[g(x+t)-g(x)\right]}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)\left[f(x+t)-f(x)\right]}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f(x)\left[g(x+t)-g(x)\right]}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}g(x+t).\lim_{t\to 0}\frac{\left[f(x+t)-f(x)\right]}{t}+\lim_{t\to 0}f(x).\lim_{t\to 0}\frac{\left[g(x+t)-g(x)\right]}{t}\\
&= g(x).f'(x)+f(x).g'(x)
\end{aligned}$$

□

Nota. Esta propiedad se puede extender a más de dos funciones. Por ejemplo, con tres funciones será:

$$\begin{aligned}
w &= f.g.h\\
w' &= f'.g.h+f.g'.h+f.g.h'
\end{aligned}$$

Propiedad 2.11. ***Derivada de*** $1/f$. *Sea la función* f *con* $f(a)\neq 0$ *y derivable en ese punto, entonces la derivada de* $g=1/f$ *en* a*, será* $g'(a)=-f'(a)/f^2(a)$.

Demostración. Se plantea la definición de derivadas:

$$g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}$$

Observemos que esta última expresión tiene sentido porque dijimos que f es derivable en a, por lo tanto es continua. Hacemos algunas operaciones para calcular el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{f(a+h)f(a)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\left[f(a+h) - f(a)\right]}{f(a+h)f(a)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.\frac{1}{f(a+h)f(a)}\right) \\
&= -f'(a).\frac{1}{f^2(a)} = -f'(a)/f^2(a)
\end{aligned}$$

□

Propiedad 2.12. ***División de funciones.*** *Sean f y g funciones derivables en todo valor de su dominio y $h = f/g$. Entonces en todo valor x perteneciente al dominio de h, se cumple que:*

$$h'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}.$$

Demostración. La demostración es sencilla si pensamos la división como un producto:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = f(x).g^{-1}(x) = f(x).\frac{1}{g(x)} \\
h'(x) &= f'(x).g^{-1}(x) + f(x)(-1)g^{-2}(x)g'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
&= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2. $f(x) = \dfrac{x^2}{ln(x)} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2x\, ln(x) - x}{ln^2(x)}$.

La siguiente propiedad es un caso particular de la propiedad 2.10. Si tomamos la función g definida por $g(x) = k$, con k un número real, entonces nos quedaría que para cada valor de x donde f y g es derivable, tal que $h(x) = g(x)f(x) = kf(x)$ se cumple que:

$$h'(x) = [k]'f(x) + k\, f'(x)$$

Como la derivada de una constante es cero, entonces $h'(x) = kf'(x)$. En conclusión, podemos enunciar el siguiente teorema.

Propiedad 2.13. ***Producto de una función por un escalar.*** *Si una función está formada por el producto entre un número (función constante) y otra función,* $h = k\, f$*, entonces para cada* x *donde* f *es derivable se cumple que:*

$$h'(x) = k\, f\,'(x).$$

Ejemplo 2.3. $f(x) = 5\, ln(x) \Longrightarrow f\,'(x) = 5\frac{1}{x} = \frac{5}{x}$.

Ejemplo 2.4. Se desea derivar la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^4 sen(x)}{\sqrt{x} + cos(x)} - 7ln(x) + \dfrac{3}{x^2}$. Esta función tiene 3 términos, por lo que derivamos cada uno por separado. Con el primer término debemos ser cuidadosos dado que si bien la principal operación es la división, en el numerador tenemos además una multiplicación. Por lo que aplicamos la Propiedad 2.12, que nos dice que

$$h = \frac{f}{g} \Rightarrow\ h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Pero cuando vayamos a derivar f tenemos que aplicar, a su vez, la regla de la multiplicación. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x^4 sen(x)}{\sqrt{x} + cos(x)}\right]' &= \frac{[x^4 sen(x)]'\,[\sqrt{x} + cos(x)] - [x^4 sen(x)]\,[\sqrt{x} + cos(x)]'}{[\sqrt{x} + cos(x)]^2} \\
&= \frac{\left[(x^4)'\, sen(x) + x^4\,(sen(x))'\right][\sqrt{x} + cos(x)] - [x^4 sen(x)]\,[\sqrt{x} + cos(x)]'}{[\sqrt{x} + cos(x)]^2} \\
&= \frac{[4x^3 sen(x) + x^4 cos(x)]\,[\sqrt{x} + cos(x)] - [x^4 sen(x)]\,[1/2\sqrt{x} - sen(x)]}{[\sqrt{x} + cos(x)]^2}
\end{aligned}$$

En el segundo término solo tenemos que aplicar la Propiedad 2.13, entonces:

$$[7ln(x)]' = 7.\frac{1}{x} = \frac{7}{x}$$

Por último, el $3/x^2$ lo podemos pensar de dos maneras distintas:

- Escribimos la x en el numerador y derivamos:

$$\left[\frac{3}{x^2}\right]' = \left[3x^{-2}\right]' = 3.(-2)x^{-3} = -6.\frac{1}{x^3} = -\frac{6}{x^3}$$

- Como una división:

$$\left[\frac{3}{x^2}\right]' = \frac{3'.x^2 - 3\,(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0.x^2 - 3{,}2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$$

Resultado:

$$f'(x) = \frac{[4x^3sen(x) + x^4cos(x)]\,[\sqrt{x} + cos(x)] - [x^4sen(x)]\,[1/2\sqrt{x} - sen(x)]}{[\sqrt{x} + cos(x)]^2} - \frac{7}{x} - \frac{6}{x^3}$$

2.4.5. Regla de la cadena

Teorema 2.14. *Sea una función g derivable en a, y otra función f, derivable en $g(a)$, entonces la composición f o g es también derivable en a y su derivada es*

$$(f\ o\ g)(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

La demostración no es sencilla, la dejamos como opcional para el estudiante apasionado.

Demostración. En primer lugar decimos que $g(x) = y$, y $g(a) = b$. Luego, armamos la siguiente función:

$$w(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(b)}{y-b} & si\ y \neq b \\ f'(b) & si\ y = b \end{cases}$$

Esta función es continua dado que $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)$, que sabemos existe por hipótesis. Al ser derivable en $y = b$, entonces es continua en dicho punto. Y como la función g es derivable en $x = a$, es continua en dicho punto. Por lo tanto, la composición $w\ o\ g$ también es continua en a. Es decir:

$$\lim_{x \to a} (w\ o\ g) = \lim_{x \to a} (w(g(x))) = w(g(a)) = w(b) = f'(b) = f'(g(a)) \qquad (2.2)$$

Entonces, si $y \neq b$, podemos escribir la función w como:

$$w(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}$$

Multiplicando por $y - b$ en ambos miembros: $w(y)(y - b) = f(y) - f(b)$, igualdad que también se verifica si $y = b$. Pero recordando que $y = g(x)$ y $b = g(a)$, nos queda:

$$w(g(x))(g(x) - g(a)) = f(g(x)) - f(g(a))$$

Invirtiendo cada miembro y dividiendo por $x - a$, con $x \neq a$:

$$f(g(x)) - f(g(a)) = w(g(x))(g(x) - g(a))$$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{w(g(x))(g(x) - g(a))}{x - a}$$

Ahora tomamos límite en cada miembro:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{w(g(x))(g(x) - g(a))}{x-a}$$

El límite del lado izquierdo es la derivada de la composición, es decir, lo que queremos saber cuánto vale. El del lado derecho lo podemos reescribir como producto de límites y nos da el resultado esperado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{w(g(x))(g(x) - g(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a} w(g(x)).\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(b).g'(a) \\ &= f'(g(a)).g'(a)\end{aligned}$$

En el límite del primer producto usamos lo hallado en **??**. □

¿Cómo será la regla de la cadena para más de una función? Si tenemos, por ejemplo:

$$w = (f \; o \; g \; o \; h)(a)$$

entonces:

$$w'(a) = f'(g(h(a))).g'(h(a)).h'(a)$$

De todas formas, estar pensando en estas fórmulas y reconocer quién es f, g y h en un ejercicio no es tan sencillo, por eso daremos una regla práctica para aplicar lo que acabamos de ver.

2.4.5.1. Regla práctica para aplicar regla de la cadena

Es común confundirse al aplicar la regla de la cadena, o porque nos falta derivar, o porque derivamos de más, o porque derivamos dos funciones al mismo tiempo, en fin, hay una serie de factores que hace que nos equivoquemos al aplicar dicha regla. Intentaremos decirles una regla práctica para que esto no suceda. Los pasos son:

- derivar de afuera hacia adentro;
- de a una función por vez;
- las funciones cuando se derivan se van multiplicando;
- los pasos anteriores se repiten hasta que no queden funciones por derivar.

Ejemplo 2.5. Derivar la función función f definida por $f(x) = sen(x^3)$.

En primer lugar debemos detectar cuántas funciones hay y cuál es la que está más afuera, es decir, al realizar un cálculo, por ejemplo si queremos evaluar la función en $x = 2$, ¿qué cuenta es la última que haremos? Para evaluar la función en 2, primero lo elevamos al cubo, nos da 8, y luego le calculamos el *seno*. Es decir que la función *seno* es la más externa. Empezaremos derivando esta función.

$$f'(x) = cos(x^3).\left[x^3\right]' = cos(x^3),3x^2$$

Ejemplo 2.6. Derivar la función función f definida por $f(x) = sen^3(x)$. En este caso el cubo lo tiene la función seno. La fórmula la podemos escribir de esta forma más clara: $f(x) = [sen(x)]^3$. Por lo tanto, si queremos evaluar la función en 2 también, primero haremos *seno* de 2, y luego lo elevaremos al cubo. Esta operación es la más externa. Entonces,

$$f'(x) = 3\left[sen(x)\right]^2.\left[sen(x)\right]' = 3sen^2(x).cos(x)$$

Ejemplo 2.7. Derivar la función f definida por $f(x) = \sqrt{ln(x^2 - x + 3)}$. Ahora tenemos tres funciones: la más interna es la cuadrática, luego viene la logarítmica y, por último, la más externa, es la raíz.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{ln(x^2-x+3)}}.\left[ln(x^2-x+3)\right]' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{ln(x^2-x+3)}}.\frac{1}{x^2-x+3}\left[x^2-x+3\right]' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{ln(x^2-x+3)}}.\frac{1}{x^2-x+3}.(2x-1) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{ln(x^2-x+3)}}.\frac{2x-1}{x^2-x+3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Derivar la función f definida por $f(x) = e^{sen^5(x^3-2x)}$. En primer lugar tenemos la función cúbica. Luego tenemos la función seno. Le sigue la potencia quinta. Por último la exponencial de base e. Entonces, empezamos a derivar respecto de esta última.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{sen^5(x^3-2x)}.\left[sen^5(x^3-2x)\right]' \\
&= e^{sen^5(x^3-2x)},5sen^4(x^3-2x).cos(x^3-2x).\left[x^3-2x\right]' \\
&= e^{sen^5(x^3-2x)},5sen^4(x^3-2x).cos(x^3-2x).(3x^2-2)
\end{aligned}$$

2.4.6. Derivadas de funciones potenciales-exponenciales

Si tenemos la función potencial f definida por $f(x) = x^3$, para encontrar su derivada, bajamos el exponente y le restamos uno al exponente original: $f'(x) = 3x^2$. Pero si la función tiene otra función en el exponente, por ejemplo, la función

g definida por $g(x) = x^{sen(x)}$, esta regla no nos sirve. ¿Cómo derivamos la función de este último ejemplo? En primer lugar, antes de derivar tratamos de escribirla de otra manera sin alterar la fórmula. Siempre que agreguemos algo debemos quitarlo, por ejemplo, si a una expresión la multiplicamos por un número luego debemos dividirla por el mismo número. Lo que vamos a hacer con la función es usar una exponencial de base e y compensar con su inversa, logaritmo natural.

Sabemos que $e^{ln(x)} = x$, entonces $f(x) = x^{sen(x)} = e^{ln(x)^{sen(x)}}$. Por propiedad de logaritmos, el seno que está en "el segundo piso" (por decirlo de alguna manera gráfica), podemos bajarlo multiplicando al primer piso, así nos queda, $g(x) = e^{ln(x)^{sen(x)}} = e^{sen(x).ln(x)}$. Esta expresión sí sabemos derivarla porque es la derivada de una exponencial de base e. Hay que tener cuidado al aplicar la regla de la cadena, teniendo en cuenta que en el exponente hay un producto. Por lo tanto, nos queda que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{sen(x).ln(x)}.\left[cos(x).ln(x) + sen(x).\frac{1}{x}\right] \\ &= x^{sen(x)}\left[cos(x).ln(x) + \frac{sen(x)}{x}\right] \end{aligned}$$

Nota. Luego de derivar, volvimos a la expresión original según la igualdad:

$$e^{sen(x).ln(x)} = x^{sen(x)}.$$

Ejemplo 2.9. Derivar la función f definida por $f(x) = sen^{\sqrt{x-2}}(x)$. En primer lugar reescribimos la función antes de derivar:

$$\begin{aligned} f(x) &= sen^{\sqrt{x-2}}(x) \\ &= [sen(x)]^{\sqrt{x-2}} \\ &= e^{ln(sen(x))^{\sqrt{x-2}}} \\ &= e^{\sqrt{x-2}.ln(sen(x))} \end{aligned}$$

Ahora derivamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{x-2}.ln(sen(x))}.\left[\frac{1}{2\sqrt{x-2}}.ln(sen(x)) + \sqrt{x-2}.\frac{1}{sen(x)}.cos(x)\right] \\ &= sen^{\sqrt{x-2}}(x)\left[\frac{ln(sen(x))}{2\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}.cos(x)}{sen(x)}\right] \end{aligned}$$

2.5. Recta tangente

Vimos que el valor de la derivada en un punto correspondía al valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función en un determinado punto.

Luego, con la pendiente, y el punto, podemos hallar la ecuación de la recta tangente. Como sabemos que la ecuación de una recta cualquiera es: $y = mx + b$. Pero, dijimos que

$$m = f'(x_0)$$

Entonces, si reemplazamos el punto en la ecuación: $y_0 = f'(x_0)x_0 + b$. Y teniendo en cuenta que y_0 es el valor de la función evaluada en el x_0, nos queda: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Despejamos b: $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Reemplazando en la ecuación de una recta genérica:

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{m}\ x \quad + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{b}$$

Sacando factor común la derivada en el punto queda que la:

La ecuación de la recta tangente en x_0
de la función f es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ejemplo 2.10. Nos piden que hallemos la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función f definida por $f(x) = e^{x^3-x}$, en $x = 1$. Entonces,

- En primer lugar derivamos utilizando la regla de la cadena: $f'(x) = e^{x^3-x}\,(3x^2 - 1)$
- Luego evaluamos la derivada en el punto: $f'(1) = e^{1^3-1}(3{\cdot}1^2{-}1) = e^0(3{-}1) = 1 \cdot 2 = 2$
- Evaluamos la función en el punto: $f(1) = e^{1^3-1} = e^0 = 1$
- Reemplazamos los valores en la fórmula de la recta tangente: $y = 2(x{-}1){+}1$. Si operamos, queda $y = 2x - 1$.

Ejemplo 2.11. Se pide que encontremos la ecuación de la recta tangente a al gráfico de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{sen^2(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, en $x = 0$. Para eso, tenemos que calcular la derivada de f en en $x = 0$ por definición debido a que la función presenta la partición del dominio en ese valor de x. Observemos que $f(0) = 0$, entonces la derivada por definición es:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sen^2(h)}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen^2(h)}{h^2} = 1$$

Aplicando la fórmula queda $y = 1(x - 0) + 0$, que también se puede escribir como $y = x$.

Ejemplo 2.12. Se quiere hallar el o los puntos para los cuales la recta tangente a al gráfico de la función f definida por $f(x) = ln(x^2 - x - 1)$ es paralela a la recta $y = x + 7$. Pero, ¿cuándo una recta es paralela? Para que una recta sea paralela a otra dada deben tener la misma pendiente, y sabemos que la pendiente de una recta tangente está dada por la derivada en el punto, por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x - 1}.(2x - 1) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 1} = 1$$

Igualamos a 1 porque es la pendiente de la otra recta. Es decir, la pendiente de la tangente debe ser igual a la de la recta que nos indican. Despejamos:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 - x - 1 \\ x^2 - x - 1 - 2x + 1 &= 0 \\ x^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $x = 0$ o $x = 3$, pero *cuidado*: $x = 0$ no pertenece al dominio de la función porque nos queda el logaritmo de un número negativo (-1). Por lo tanto, el único valor que cumple es $x = 3$. En conclusión, el punto que cumple lo pedido es $P = (3,\ f(3)) = (3,\ ln(5))$.

2.5.1. Recta normal

La recta normal a la gráfica de una función en un determinado punto es una recta que la corta de forma perpendicular. Es decir, la recta normal es perpendicular a la recta tangente. Para hallarla, en caso que no sea una recta paralela al eje de las abscisas, simplemente tenemos que saber la pendiente de su recta tangente y buscar el inverso multiplicativo cambiado de signo.

Ejemplo 2.13. Sea la función $f(x) = e^{x^3 - x}$, se desea hallar su recta normal en $x = 1$.

Esta función la habíamos visto en el Ejemplo 2.10, a la que le habíamos calculado la recta tangente en $x = 1$. La pendiente es $m = 2$ y la función evaluada en el punto es $f(1) = 1$. Por lo tanto, la pendiente de la recta normal será $m_n = -1/m = -1/2$. Con la pendiente y un punto de paso podemos hallar la

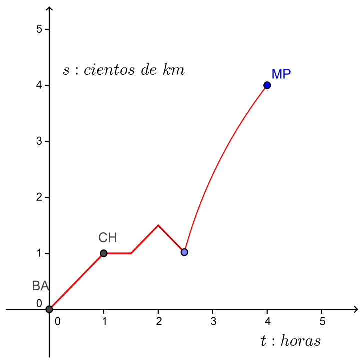


Figura 2.12: *Espacio recorrido en cientos de km en función del tiempo transcurrido en horas.*

recta pedida: $m_n = -1/2$ y $P = (1, 1)$. Entonces:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$$
$$1 + 1/2 = b$$
$$3/2 = b$$

Luego, la ecuación de la recta normal en $x = 1$ es: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

2.6. Velocidad instantánea

Supongamos que una persona nos dice que manejó desde Buenos Aires hasta Mar del Plata, es decir, 400km. Y nos informa que tardó 4 horas en todo el viaje. Un cálculo rápido que haremos es que la velocidad a la que conducía era de 100km/hora (400km / 4hs = 100 km/hora). Sin embargo, si vemos el gráfico 2.12 que nos indica la posición en que estuvo en cada momento, vemos que la persona salió de Buenos Aires a la hora cero, yendo a $100km/h$. Luego, en Chascomús, a los 100km paró media hora a tomar un café (podemos suponer), avanzó $50km$ más a la misma velocidad cuando recordó que olvidó algo en el café y regresó a buscarlo. Finalmente, recorrió $300km$ en una hora y media, a una velocidad promedio de $200km/h$. No lo hagan: es peligroso y además los pueden multar! Conclusión, la cuenta que habíamos hecho es una velocidad promedio pero, la velocidad en cada instante fue variando: $100km/h$ al principio, luego estuvo detenido $0km/hora$, continuó a $100km/h$ por media hora, luego fue a $-100km/h$ (si bien no hay velocidades negativas, esto significa que regresaba en lugar de avanzar). Y finalmente, el último tramo, lo hizo a unos $200km/h$.

¿Qué cuenta hacemos para calcular las velocidades? Dividimos las diferencias

de los valores en el eje y con las diferencias en los valores de las x. *¿Y esto qué significa?* Por supuesto, es la pendiente de la recta secante. Llevado al límite, en un intervalo de tiempo muy pequeño, sería la pendiente de la recta tangente, lo que significa la velocidad en cada instante. Por lo tanto, si la función representa la posición de un móvil en función del tiempo, la derivada, en cada punto, representa la velocidad instantánea en ese punto. Es decir, sería la velocidad que en un momento dado nos marca el velocímetro.

Ejemplo 2.14. Un automóvil parte de su casa y se aleja de manera que la función $d(t) = t^3 + 2t$, nos indica la distancia que se alejó (en metros) en función del tiempo (en segundos). Si cuando parte se toma como el segundo 0, indicar a qué distancia de su casa se encuentra a los dos segundos, cuál es su velocidad promedio desde que salió y cuál es su velocidad en ese momento.

- El cálculo de la distancia es directo: $d(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 = 8 + 4 = 12$. Respuesta: se encuentra a 12 mts.

- Para el cálculo de la velocidad promedio hacemos:

$$vel_{prom} = \frac{distancia\_recorrida}{tiempo} = \frac{12mts}{2seg} = 6mts/s$$

- Para la velocidad instantánea debemos derivar: $d'(t) = 3t^2 + 2$, entonces: $d'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14$. Respuesta: va a $14mts/s \simeq 50km/h$

2.7. Derivadas sucesivas

Aclaración: cuando digamos f es una función derivable, sin especificar, nos estamos refiriendo a que es derivable en todo su dominio. También, podríamos indicar que f es derivable en un punto.

Dada una función f, derivable en un intervalo, entonces podemos calcular la función derivada f' en dicho intervalo. Como esta es una nueva función, si a su vez es derivable, podríamos volver a derivarla, obteniendo lo que se conoce como derivada segunda de f, cuya notación es f'' o, también, $f^{(2)}$, aunque esta última notación puede llevar a confusiones dado que se podría pensar que se está elevando al cuadrado, por este motivo se prefieren los números romanos. El hecho de derivar podríamos repetirlo una y otra vez, tanto como se pueda. A estas nuevas funciones se las conoce como derivadas sucesivas de una función f , o derivadas de orden n de f. Por ejemplo, se pide calcular la derivada cuarta de la función $f(x) = xe^x$. Para poder encontrar dicha derivada hay que derivar cuatro veces:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = e^x + xe^x &\implies f'(x) = e^x(1+x) \\
f''(x) = e^x + (1+x)e^x &\implies f''(x) = e^x(2+x) \\
f'''(x) = e^x + (2+x)e^x &\implies f'''(x) = e^x(3+x) \\
f^{iv}(x) = e^x + (3+x)e^x &\implies f^{iv}(x) = e^x(4+x)
\end{aligned}
$$

Podemos indicarla en forma de números romanos o simplemente poner entre paréntesis el número: $f^{iv}(x)$ o $f^{(4)}(x)$.

Ejemplo 2.15. Sea la función $f(x) = ln(x)$, se pide calcular su derivada segunda e indicar el dominio. Calculemos la derivada primera y la segunda:

$$f'(x) = 1/x$$

$$f''(x) = -1/x^2$$

Observación. Un error común es decir que el dominio de la derivada primera y el de la segunda son todos los reales menos el cero. ¿Por qué? Porque la función original no está definida para valores negativos de x. Sería el equivalente a decir que en valores negativos la gráfica de la función tiene recta tangente, sin embargo para esos valores ni siquiera existe la función.

Por lo tanto, como sabemos que $Df = (0, +\infty)$, entonces $Df' = (0, +\infty)$ y $Df'' = (0, +\infty)$.

Los dominios de las derivadas *nunca* pueden ser más amplios que el de la función original. También se debe cumplir que el dominio de una derivada sucesiva tiene que estar incluido en el dominio de la derivada que la antecede. Esta inclusión no tiene por qué ser estricta, es decir: puede ser igual. Por ejemplo: el dominio de la derivada segunda tiene que ser igual o estar incluido en el de la derivada primera. A su vez, el dominio de la derivada primera tiene que ser igual o estar incluido en el de la función. En símbolos:

$$Df'' \subseteq Df' \subseteq Df$$

Ejemplo 2.16. Tenemos la función $f(x) = x^3$, y se desea hallar $f''(1)$. Parece muy inocente pero lo vamos a usar para destacar algo que suele pasarse por alto.

- derivada primera genérica: $f'(x) = 3x^2$;
- derivada segunda genérica: $f''(x) = 6x$;
- derivada segunda en el punto de interés: $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$.

Lo que queremos destacar es que primero tenemos que buscar la derivada segunda general, y luego evaluar en el punto que nos piden.

Ejemplo 2.17. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 sen(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, se desea verificar si existe la derivada segunda en $x = 0$.

Buscamos la derivada primera en $x = 0$ por definición, dado que es un punto problemático:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 sen(1/h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 sen(1/h) = 0 \end{aligned}$$

En el último paso utilizamos la propiedad de «0 por acotado». Sin embargo, si dijéramos que entonces la derivada segunda es 0 estaríamos cometiendo el error indicado en el ejercicio anterior. No nos alcanza con tener la primera derivada en el punto, necesitamos tener la fórmula de la derivada alrededor del $x = 0$ para poder tomar el límite. Fuera de $x = 0$ la función no presenta problemas, por lo que podemos utilizar la regla práctica (cuidado que hay un producto y regla de la cadena):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x^3 . sen(1/x)\right]' \\ &= (x^3)' sen(1/x) + x^3 \left[sen(1/x)\right]' \\ &= 3x^2 sen(1/x) + x^3 cos(1/x)(-1/x^2) \\ &= 3x^2 sen(1/x) - x cos(1/x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 sen(1/x) - x cos(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Recién en este momento podremos analizar la derivada segunda en $x = 0$.

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 sen(1/h) - h cos(1/h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3h sen(1/h) - cos(1/h) \end{aligned}$$

pero este límite no existe. Quedaron dos términos: el primero es «0 por acotado», grafico/acel1.pdf

Figura 2.13: *Función posición, función velocidad y función aceleración*

pero el segundo es solo acotado, no tiende a ningún número cuando h es muy chico. Por lo tanto no existe la derivada segunda en $x = 0$.

2.7.1. Aceleración

Vimos en la sección anterior que si teníamos una función que nos indica la posición en cada instante en función del tiempo, la velocidad promedio de un trayecto la hacíamos dividiendo las diferencias de los valores de la función sobre las diferencias de tiempos. La derivada en un punto nos da la velocidad instantánea en dicho punto. Es decir que la función derivada nos irá diciendo la velocidad instantánea en cada punto. El mismo procedimiento podríamos hacer con la función velocidad instantánea y nos iría dando la aceleración instantánea. Es decir, la derivada de la velocidad (la derivada segunda de la función) nos da la aceleración instantánea.

Retomando el ejemplo 2.14 del automóvil, en donde la función posición está dada por $d(t) = t^3 + 2t$, la aceleración a los 2 segundos será $d''(t) = 6t$, $d''(2) = 6 \cdot 2 = 12$. Las unidades serán mts/seg^2. Viendo el gráfico 2.13 las tres funciones (posición, velocidad, aceleración) en un mismo gráfico :

En línea continua vemos la función posición, que es una cúbica. En trazos discontinuados vemos su derivada, es decir, la función velocidad, que es una parábola. Y en línea punteada vemos la derivada segunda, es decir, la función aceleración, que es una recta. Todas están en función del tiempo.

2.8. Derivadas de funciones implícitas

Hasta ahora hemos trabajado con expresiones en donde tenemos la fórmula de la función de forma explícita. Por ejemplo, $f(x) = 3x + 2$. Como los valores de la función varían, podemos pensar que son una nueva variable que generalmente llamamos y. Por lo tanto, x e y son dos variables. De la primera decimos que es una variable independiente porque toma los valores que desee, siempre y cuando pertenezcan al dominio. En cambio, de la segunda, decimos que es la variable dependiente: no puede tomar cualquier valor, depende del valor que tenga x.

Entonces, en lugar de escribir $f(x) = 3x + 2$, es común escribir $y = 3x + 2$. A esta forma la llamamos *forma explícita* (en el Diccionario de la Lengua Española se indica «que expresa clara y determinadamente una cosa» con respecto a la acepción *explícita*). Sin embargo, podríamos escribir lo mismo de la siguiente manera: $y - 3x = 2$, de esta forma decimos que está escrito en *forma implícita* (en el mismo diccionario se define «incluido en otra cosa, sin que esta lo exprese» en cuanto al término *implícita*). Hay que tener en cuenta que la expresión explícita no siempre es posible. Por ejemplo, en $y^3 + 3yx + x^3 = 3$, no podremos despejar la y, por lo cual, no se puede trabajar con la forma explícita.

Para derivar una función dada en forma implícita solo hay que tener en cuenta que $y = f(x)$, por lo tanto, cuando haya que derivar y vamos a tener que usar la regla de la cadena. Pero, para determinar si una función está definida en forma implícita o no deberíamos verificar algunas hipótesis que no las veremos porque involucra el estudio de funciones de más de una variable lo cual excede este curso. Por lo tanto, vamos a asumir a la hora de resolver los ejercicios que las funciones siempre están definidas.

¿Qué queremos decir con que este definida o no? Por ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

no define ninguna función ya que su solución es vacía. Porque, si despejamos queda que

$$x^2 + y^2 = -1$$

y la suma de dos positivos nunca puede ser negativo. En cambio,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

define dos funciones:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera para los y mayores que 0, y la segunda para los menores, compartiendo ambas $y = 0$.

Ejemplo 2.18. Queremos derivar la función $x^2 + xy + y^2 = 3$ en $x = 1$ e $y = 1$.

Se deriva la expresión a ambos miembros teniendo en cuenta que y depende de x:

$$\begin{aligned} \left[x^2+xy+y^2\right]' &= [3]' \\ \left[x^2\right]' + [xy]' + \left[y^2\right]' &= [3]' \\ 2x + 1.y + xy' + 2y.y' &= 0 \end{aligned}$$

La derivada podríamos dejarla también en forma implícita. En algunos casos, como en este ejemplo, podremos despejar sacando factor común y' para obtener la derivada de manera explícita:

$$\begin{aligned} 2x + y + y'(x+2y) &= 0 \\ y'(x+2y) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-(2x+y)}{x+2y} \end{aligned}$$

2.9. Derivadas de funciones inversas

Para poder calcular derivadas de funciones inversas es necesario utilizar el siguiente teorema:

Teorema 2.15. *Si f es una función biyectiva con derivada finita no nula en el valor a perteneciente al dominio, entonces $g = f^{-1}$ tiene derivada finita en $b = f(a)$ y esta derivada es $\frac{1}{f'(a)}$.*

La demostración se basa en el hecho de que para todo $x \in Domf$ se verifica que $(gof)_{(x)} = (f^{-1} of)_{(x)} = x$. Aplicando la regla de la cadena obtenemos el resultado que afirma el teorema.

Demostración. $(g\ o\ f)(x) = g(f(x)) = x$, dado que es una composición de una función con su inversa $[g(f(a))]' = g'(f(a))f'(a) = 1$. Entonces: $g'(f(a)) = g'(b) = 1/f'(a)$ □

Observación. Cuando calculamos la derivada con valores puntuales no hay ningún problema, ya que $g'(b) = 1/f'(a)$, pero cuando buscamos la función derivada tenemos que tener en cuenta que la derivada no va a quedar en función de x, sino de y, por lo que hay que despejar. Con ejemplos lo veremos mejor.

Ejemplo 2.19. Sea $f : R_0^+ \to R$, dada por $f(x) = x^2$. Hallar $(f^{-1})'(4)$ de dos formas distintas:

1. Hallando $f^{-1}(x)$ y derivando.

2. Aplicando el teorema anterior.

Solución. Para el primer punto buscamos la inversa de *f*.

- $y = x^2$
- $\sqrt{y} = x$, como el dominio de f son los reales positivos más el cero, nos quedamos con la raíz cuadrada positiva.
- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, esta es la función que en el teorema llamamos g.
- Ahora derivamos: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, entonces: $g'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{4}$

En el segundo ítem nos piden usar el teorema. En este caso no necesitamos encontrar la función inversa. Pues, $f(x) = x^2$, por lo tanto $f'(x) = 2x$ y $f'(2) = 4$. Acá hay que tener cuidado porque b es la que vale 4, en cambio a vale 2. Entonces: $g'(4) = 1/f'(2) = 1/4$.

Ejemplo 2.20. Sea $f : R_0^+ \to R$, dada por $f(x) = x^2$. Hallar $g'(x) = (f^{-1})'(x)$ de dos formas distintas.

Solución. La primer opción puede ser hallando $g = f^{-1}$ y derivando.

- De la primera manera ya está hecho en el ejemplo anterior: $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$

La segunda opción sería aplicando el teorema recién visto, pero tenemos una complicación que sortear: como $f'(x) = 2x$ podríamos pensar que $g'(x) = 1/f'(x) = 1/2x$, *ERROR!!* Cuidado, lo que queda en la fórmula es $g'(x) = 1/2y$, pero $y = \sqrt{x}$, de esta forma nos da igual que lo calculado de forma directa.

Nota. El lector puede estar pensando "¿Para qué complicarse con este teorema si es más sencillo buscar la función inversa y resolverlo de forma directa?" La respuesta es que a veces no se puede hallar una función inversa, y otras veces, a pesar de que no lo parezca, este camino es más simple.

Ejemplo 2.21. Si se tiene $f : R \to R$ una función biyectiva, tal que $f(2) = 3$ y $f\,'(2) = 4$. Se desea calcular $g\,'(3)$ con g la inversa de f. La solución usando el teorema es muy sencilla, se tiene que $g(3) = f^{-1}(3) = f^{-1}(f(2))$, entonces $g'(3) = \frac{1}{f\,'(2)} = \frac{1}{4}$.

Nota. En este ejemplo no podríamos haber encontrado la inversa porque desconocemos la función.

Ejemplo 2.22. Calcular la derivada de $g : [-1, 1] \to [0, \pi]/g(x) = arccos(x)$.

Solución. Sabemos que $g(x)$ es la inversa de $f(x) = cos(x)$ y $f'(x) = -sen(x)$. Además, por teorema, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ con $b = f(a) = cos(a)$. Entonces queda que:$g'(b) = -\frac{1}{sen(a)}$, pero no podemos dejarlo expresado de esta forma porque la derivada está en función de b no de a. Por lo tanto, hay que pensar cómo se hace para que aparezca la b. Sabemos que $sen^2(a) + cos^2(a) = 1$, y si despejamos el $sen(a)$ queda $sen(a) = \sqrt{1 - cos^2(a)}$. Observemos que tomamos la raíz positiva dado que en el intervalo $[0, \pi]$, se cumple que $sen(x) \geq 0$. Entonces se sustituye en la derivada de g: $g'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(a)}}$. Sabemos que $b = cos(a)$, por lo que queda $g'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$. Como b es cualquier elemento del dominio de g, podemos reemplazarlo por x para obtener:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2.10. Diferencial de una función

Cuando trabajamos con derivadas podemos utilizar, como ya dijimos, distintas notaciones posibles, entre ellas $f'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$. Muchos se habrán preguntado a qué se debe esta segunda notación, podemos justificarla explicando qué es un diferencial. Para esto tenemos que recordar la definición de derivada en un valor x del dominio de la función f.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Hay una propiedad de límite que indica que la diferencia entre la función f y su limite es un infinitésimo en el valor donde se calcula el límite. Esto es,

$f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(h)$ con g el infinitésimo[1] cuando h tiende a cero.

Se considera h distinto de cero, por lo tanto, podemos multiplicar miembro a miembro y obtener:

$$hf'(x) - (f(x + h) - f(x)) = hg(h)$$

Esto quiere decir que para valores extremadamente pequeños de h las funciones $hf'(x)$ y $f(x + h) - f(x)$ son aproximadamente iguales. Es decir:

$$hf'(x) \simeq f(x + h) - f(x).$$

En la definición de derivada, h es el incremento respecto de x. Cuando se calcula la derivada se analiza qué pasa cuando ese incremento tiende a cero. En matemática

[1] Recordar que g es infinitésimo en el valor a si y sólo si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

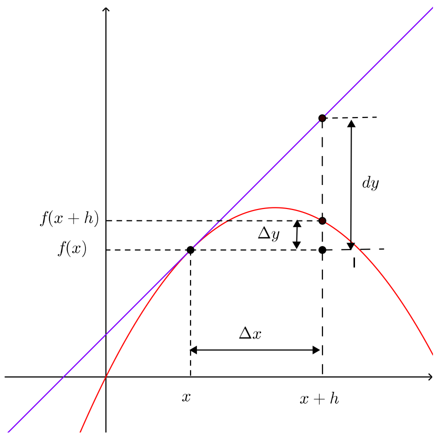


Figura 2.14: Interpretación geométrica del diferencial.

se representan los incrementos con el símbolo $\triangle$, por lo tanto, es muy frecuente encontrar escrito en lugar de h el símbolo $\triangle x$. Cuando calculamos $f(x+h)-f(x)$ estamos buscando cuánto varía la imagen de la función cuando se incrementa el valor de x, entonces podemos escribir que $\triangle f(x,h) = f(x+h) - f(x)$, también podemos indicarlo directamente como $\triangle y = f(x+h)-f(x)$. A la expresión $hf'(x)$ se la denomina *diferencial de f en el valor x*, y se lo denota con el símbolo dy o $df(x,h)$. Utilizando la notación de incrementos queda que: $dy = \triangle x.f'(x)$. En el gráfico 2.14 se interpreta geográficamente dicha expresión para $\triangle x > 0$.

Resumiendo:

- $\triangle x = dx = h$
- $\triangle y = f(x+h) - f(x)$
- $dy = h.f'(x)$

Observación. Si se considera la función identidad, se tiene que $dy = h$. O sea, el diferencial de la función identidad, en cualquier punto y respecto de cualquier incremento h es igual a dicho incremento. Esto suele indicarse como $dx = h$. Por lo tanto, se puede escribir:

$$dy = f'(x)dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Ejemplo 2.23. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^3$, calcular el incremento en y y el diferencial de y cuando $\triangle x = 0,1$.

Solución. Solución. $\triangle y = f(1+0,1) - f(1) = 1,1^3 - 1^3 = 0,331$. Para calcular el diferencial de y, es necesario calcular la derivada: $f'(x) = 3x^2$. Por lo tanto, el diferencial es $dy = 0,1f'(1) = 0,1 \cdot 3 \cdot 1^2 = 0,3$.

Aplicaciones

A partir del diferencial se puede aproximar valores de funciones debido a que dy es aproximadamente $f(x+h) - f(x)$. Por lo que se puede escribir que:

$$f(x+h) \cong f(x) + dy \to f(x+h) \cong f(x) + hf'(x) \tag{2.3}$$

También se puede usar para estimar errores cuando se toma mediciones aproximadas. En los siguientes dos ejemplos podemos ver ambas situaciones.

Ejemplo 2.24. Dar un valor aproximado de $\sqrt[3]{29}$ sin usar calculadora.

Solución. Primero hay que distinguir quién es x y quién es h. Para eso se busca número más cercano a 29 que tenga raíz cúbica exacta y la diferencia con 29 es h: $x = 27$ y $h = 2$. Y la función es $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuya derivada es $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Se aplica (2.3) y obtiene: $f(29) \cong f(27) + 2.f'(27) \cong \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cong 3,111$. Si se calcula el valor de $\sqrt[3]{29}$ con la calculadora se obtiene 3,072. Por lo cual, el error cometido aproximando es menor a 0,04.

Ejemplo 2.25. Se midió el radio de un lata cilíndrica de 7 cm de altura y se obtuvo que era de 10 cm. Se sabe que el instrumento utilizado tiene un error de a lo sumo 0,01 cm. ¿Cuál es el error máximo que se puede cometer al calcular el volumen de la lata usando este valor?

Solución. Sea r el radio del cilindro, el volumen es $V = 7\pi r^2$. Se considera al error cometido en el radio como $\triangle r = 0,01$. Por lo tanto, el error al medir el volumen es el diferencial de V: $dV = 14\pi r.\triangle r \Rightarrow dV = 14\pi{,}10{,}0,01 \cong 4{,}4cm^3$. Mirando este valor, no se puede saber qué tan grande o chico es, para tener una mejor idea del tamaño del error es mejor usas el error relativo. Una aproximación de este se obtiene como el cociente entre el diferencial y el valor del volumen: $\frac{dV}{V} = \frac{14\pi r.\triangle r}{7\pi r^2} = \frac{\triangle r}{5r}$. Si se reemplaza por los datos se tiene que el error relativo en el volumen es $\frac{0{,}1}{5{,}10} = 0,002$. Esto significa que que tenemos un error menor al 0,2 %.