Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)

NOTAS SOBRE POLINOMIO DE TAYLOR

Andrés Juárez

Melisa Proyetti Martino

Índice general

POLINOMIO DE TAYLOR

4.1. Aproximación de funciones

Muchas veces es interesante aproximar una función derivable no polinómica mediante una polinómica y calcular el error que se comete al evaluar la función en un número particular. En otras palabras, si f es una función y p es el polinomio que la aproxima, $r(x)$ es el error que se comete al evaluar f en cada valor de x perteneciente al dominio, es decir:

$$\forall x \ \in \ Dom\, f \ : \ f(x) - p(x) = r(x)$$

4.1.1. Polinomio de Taylor

Antes de explicar qué es el polinomio de Taylor, es necesario que recordemos algunas cuestiones sobre polinomios. Supongamos que tenemos el polinomio $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ y lo queremos dividir por $q(x) = x + 2$. Por el formato del divisor, aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 2 & -1 \\ & & & \\ -2 & & -6 & 8 \\ \hline & 3 & -4 & 7 \end{array}$$

Observamos que el cociente es $C_1(x) = 3x - 4$ y el resto es $R_1(x) = 7$. En la división entera, el dividendo (en nuestro caso $p(x)$) se escribe como el cociente por el divisor más el resto. Según nuestro ejemplo queda:

$$p(x) = (3x - 4).(x + 2) + 7 \qquad (4.1.1)$$

Ahora podemos volver a dividir el cociente por $q(x)$. Esto lo hacemos hasta que el grado del nuevo cociente sea menor al grado de $q(x)$.

$$\begin{array}{r|rr} & 3 & -4 \\ & & \\ -2 & & -6 \\ \hline & 3 & -10 \end{array}$$

Decimos que el cociente de dividir el polinomio $C_1(x) = 3x-4$ por el polinomio $q(x)$ es $C_2(x) = 3$ y el resto es $R_2(x) = -10$. Por lo tanto, $3x - 4 = 3.(x+2) - 10$. Si sustituimos esta expresión en 4.1.1, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (3x-4).(x+2)+7 \\ &= (3.(x+2)-10)\,(x+2)+7 \end{aligned}$$

Hacemos distributiva para expresar al polinomio $p(x)$ como potencias de $(x+2)$:

$$p(x) = 3.(x+2)^2 - 10(x+2) + 7 \tag{4.1.2}$$

Ésta es la expresión de $p(x)$ en función del polinomio $q(x)$.

Una observación: ¿cuánto valen las derivadas sucesivas de $p(x)$ en -2? Para responder a la pregunta tenemos que derivar $p(x)$ y remplazar por -2.

$$\begin{array}{ccc} p(x) = 3x^2 + 2x - 1 & \to & p(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 1 = 7 \\ p'(x) = 6x + 2 & \to & p'(-2) = 6(-2) + 2 = -10 \\ p''(x) = 6 & \to & p''(-2) = 6 \end{array}$$

Las derivadas siguientes son todas ceros. Pregunta: ¿hay alguna relación entre los coeficientes de la ecuación 4.1.2 y las derivadas? Para arribar a una respuesta necesitamos formalizar lo que acabamos de hacer con $p(x)$.

Sea el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Este polinomio se puede dividir reiteradamente por el polinomio $q(x) = x-c$ con c un número real. Y como la división entera es igual al divisor por el cociente más el resto, se puede escribir:

$$p(x) \quad = \quad b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + ... + b_n(x-c)^n$$

Si derivamos n veces, evaluamos cada derivada en c y recordamos que el factorial de un número natural es el producto de todos los números menores o iguales a él (ejemplo: $4! = 4{,}3{,}2{,}1$), queda:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + ... + b_n(x-c)^n & \rightarrow\quad & p(c) = b_0 \\
p'(x) &= b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + ... + nb_n(x-c)^{n-1} & \rightarrow\quad & p'(c) = b_1 \\
p''(x) &= 2b_2 + 3{,}2.b_3(x-c) + ... + n.(n-1).b_n(x-c)^{n-2} & \rightarrow\quad & p''(c) = 2b_2 \\
& & & \quad = 2!b_2 \\
p'''(x) &= 3{,}2.b_3 + ... + n.(n-1)(n-2).b_n(x-c)^{n-3} & \rightarrow\quad & p'''(c) = \\
& & & \quad = 3{,}2.b_3 \\
& & & \quad = 3!b_3 \\
& ... & ... \quad & ... \\
p^{(n)} &= n(n-1)(n-2)(n-3)..,1b_n & \rightarrow\quad & p^{(n)}(c) = n!b_n
\end{aligned}
$$

Despejando y sustituyendo en $p(x)$, concluimos que:

El polinomio $p(x)$ se puede expresar como

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Esta expresión se denomina Polinomio de Taylor centrado en c

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta planteada previamente es que hay una relación entre los coeficientes y las derivadas evaluadas en c: el coeficiente del termino de grado n es el cociente entre la derivada n-ésima evaluada en c y el factorial de n.

4.2. Polinomio de Taylor correspondiente a la función f centrado en c

Si una función f es n veces derivable en el intervalo (a,c), entonces para todo $c \in (a,b)$ se puede calcular $f'(c)$, $f''(c)$, ..., $f^{(n)}(c)$.

El polinomio que se expresa como:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se denomina **Polinomio de Taylor de f centrado en c de grado n.**

Este polinomio P_n tiene la particularidad que las derivadas en c coinciden con las derivadas en c de la función f, es decir: $f(c) = P_n(c)$, $f'(c) = P_n'(c)$, $f''(c) = P_n''(c)$, ..., $f^{(n)}(c) = P_n^{(n)}(c)$.

Ejemplo 4.1. Encontrar el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = ln(x+2)$ centrado en $x = -1$.

Solución. El polinomio de grado 6 centrado en $x = -1$ lo expresamos de la siguiente forma:

$$P_6(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3 + \\ + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 + \frac{f^{(5)}(-1)}{5!}(x+1)^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x+1)^6$$

Necesitamos calcular las seis primeras derivadas de f y evaluarlas en -1 para encontrar los coeficientes:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ln(x+2) \\
f'(x) &= \frac{1}{x+2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+2)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{2{,}3}{(x+2)^4} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{2{,}3{,}4}{(x+2)^5} \\
f^{(6)}(x) &= -\frac{2{,}3{,}4{,}5}{(x+2)^6}
\end{aligned}$$

Evaluamos cada derivada en $x = -1$.

$$\begin{aligned}
f(-1) &= ln(-1+2) = 0 \\
f'(-1) &= \frac{1}{-1+2} = 1 \\
f''(-1) &= -\frac{1}{(-1+2)^2} = -1 \\
f'''(-1) &= \frac{2}{(-1+2)^3} = 2 \\
f^{(4)}(-1) &= -\frac{2{,}3}{(-1+2)^4} = -3! \\
f^{(5)}(-1) &= \frac{2{,}3{,}4}{(-1+2)^5} = 4! \\
f^{(6)}(-1) &= -\frac{2{,}3{,}4{,}5}{(-1+2)^6} = -5!
\end{aligned}$$

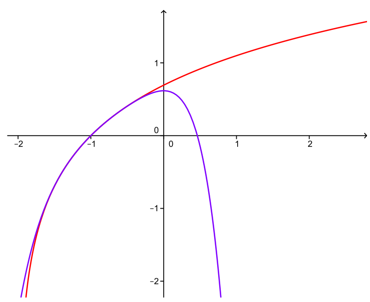
Ahora estamos en condiciones de escribir el polinomio:

$$P_6(x) = 0 + 1(x+1) + \frac{(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{2}{3!}(x+1)^3 + \frac{(-3!)}{4!}(x+1)^4 + \\ + \frac{4!}{5!}(x+1)^5 + \frac{(-5!)}{6!}(x+1)^6$$

Realizamos algunas cuentas y obtenemos que el polinomio de Taylor de f centrado en -1 de orden 6 es:

$$P_6(x) = (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + \frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{6}(x+1)^6$$

Podemos hacer un gráfico con la función y el polinomio para ver qué representa geométricamente:



En el gráfico observamos que el polinomio aproxima muy bien a la función para valores cercanos a -1. A medida que nos alejamos el error aumenta a tal punto que la aproximación deja de servir. El error va a depender del grado del polinomio, a mayor grado menor error en las cercanías de c para los cuales se calcula el polinomio. Una pregunta interesante es: *¿cómo se calcula el error que se comete al estimar el valor de la función para cierto x evaluando con el polinomio?*

4.2.1. Resto de Taylor

Es interesante conocer el valor de $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ en un valor de x conocido en un entorno de c. $r_n(x)$ es el error que se comete al aproximar $f(x)$ con $P_n(x)$. Este error depende del valor de x elegido y del grado del polinomio.

$r_n(x)$ se llama Resto de Taylor o término complementario.

Es necesario encontrar una expresión general para encontrar el resto.

Ejemplo 4.2. Con la función del ejemplo anterior verificar que existe $z \in (-1, x)$ tal que $f(x) - P_6(x) = \frac{f^{(7)}(z)}{7!}(x+1)^7$.

Solución. Ya encontramos que el polinomio de Taylor de grado 6 es

$$P_6(x) = (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + \frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{6}(x+1)^6$$

Para poder verificar lo pedido necesitamos recordar el Teorema del valor medio generalizado o Teorema de Cauchy, que se utiliza para demostrar la regla de L'Hopital:

Teorema de Cauchy. Sea h y g dos funciones que cumplen que:

1. son funciones continuas en $[a, b]$;
2. tienen derivadas finitas en (a, b);
3. $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$.

Entonces:

$$\exists c \in (a, b) / \frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)}$$

¿Cómo usamos este teorema?

Primero necesitamos definir h y g. Lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$h(x) = f(x) - P_6(x) \text{ y } g(x) = (x+1)^7 \text{ definidas en el intervalo } (-1, x)$$

Ambas funciones cumplen las hipótesis del teorema, que corresponden a los ítems 1, 2 y 3. O sea, ambas funciones son continuas en el intervalo cerrado, derivables en el abierto y la derivada de g es distinta de cero en todo el intervalo. Entonces aseguramos que existe $c_1 \in (-1, x)$ tal que

$$\frac{h(x) - h(-1)}{g(x) - g(-1)} = \frac{h'(c_1)}{g'(c_1)}. \tag{4.2.1}$$

Observemos que:

$h(-1) = f(-1) - P_6(-1) = \ln(1) - 0 = 0$

$g(-1) = (-1+1)^7 = 0$

$g'(c_1) = 7(c_1+1)^6$

$h'(c_1) = f'(c_1) - P_6'(c_1)$

Por lo tanto, la ecuación 4.2.1 la reescribimos como $\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_1) - P_6'(c_1)}{7(c_1+1)^6}$ que vale para algún $c_1 \in (-1, x)$. Ahora, volvemos a definir dos funciones: $h_1(c_1) = f(c_1) -$

$P_6(c_1)$ y $g_1(c_1) = 7(c_1+1)^6$. Ambas verifican las hipótesis del teorema de Cauchy, entonces: $\exists\, c_2 \in (-1, c_1) / \frac{h_1(c_1)-h_1(-1)}{g_1(c_1)-g_1(-1)} = \frac{h_1'(c_2)}{g_1'(c_2)}$. Podemos probar que $h_1(-1) = 0$ y $g_1(-1) = 0$. Por lo tanto, $h_1'(c_2) = [h'(c_2)]' = h''(c_2)$ y $g_1'(c_2) = 7{,}6.(c_2+1)^5$. Sustituyendo queda:

$$\exists\, c_2 \in (-1, c_1) / \frac{h_1(c_1)}{g_1(c_1)} = \frac{h''(c_2)}{7{,}6.(c_2+1)^5} = \frac{f''(c_2) - P_6''(c_2)}{7{,}6.(c_2+1)^6}$$

Este proceso se puede repetir una y otra vez en total 7 veces (si derivamos 8 veces el denominador $g(x)$ se hace cero). Por lo que queda:

$$\begin{aligned} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - P_6(x)}{(x+1)^7} = \frac{f'(c_1) - P_6'(c_1)}{7(c_1+1)^6} = \frac{h''(c_2)}{7{,}6.(c_2+1)^5} \\ &= \ldots = \frac{h''(c_7)}{7{,}6{,}5{,}4{,}3{,}2{,}1} = \frac{f^{(7)}(c_7) - P^{(7)}{}_6(c_7)}{7!} \end{aligned}$$

Y como $P^{(7)}{}_6(c_7) = 0$ por ser un polinomio de grado 6, tenemos que:

$$\exists\, z \in (-1, x) / \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - P_6(x)}{(x+1)^7} = \frac{f^{(7)}(z)}{7!}.$$

Despejando la última igualdad, llegamos a lo pedido:

$$\exists\, z \in (-1, x) / f(x) - P_6(x) = \frac{f^{(7)}(z)}{7!}(x+1)^7$$

Como dijimos previamente, el error cometido es la diferencia entre el polinomio y la función. A este error lo llamamos resto de Taylor. O sea, el resto de Taylor de la función f cuando se toma el polinomio de Taylor de grado 6 es:

$$r(x) = \frac{f^{(7)}(z)}{7!}(x+1)^7$$

Esto que acabamos de deducir se resume en el siguiente teorema:

Teorema del Resto de Taylor. Sea f una función con derivada finita de orden $(n+1)$ en todos los valores de x pertenecientes a un entorno de un valor c. Si x es un valor cualquiera de dicho entorno, entonces:

$$\exists\, z \in (c, x) / f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de la función f centrado en $x = c$.
Se define el **Resto de Taylor** del polinomio P_n como:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Observación 4.3. La demostración de este teorema es análoga a la resolución del ejemplo, por tal motivo omitimos la demostración.

4.2.2. Aplicaciones

Dada una función, por ejemplo, $f(x) = ln(x+2)$ y el polinomio asociado de grado n centrado en c, según nuestro ejemplo:

$$P_6(x) = (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + \frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{6}(x+1)^6$$

El resto es $r_6(x) = \frac{f^{(7)}(z)}{7!}(x+1)^7$, con $f^{(7)}(z) = \frac{6!}{(z+2)^7}$, sustituyendo nos queda que $r_6(x) = \frac{6!}{(z+2)^7}.\frac{1}{7!}(x+1)^7 = \frac{1}{7(z+2)^7}(x+1)^7$. Hay dos problemas que se pueden presentar:

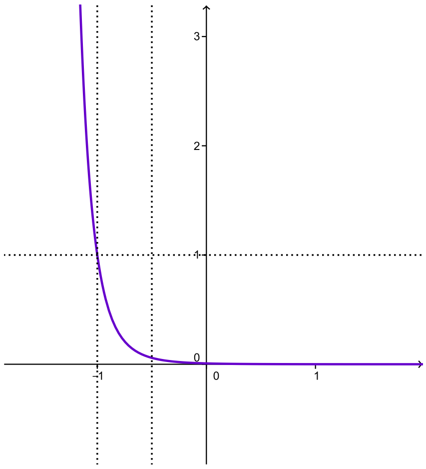
4.2.2.1. Estimar el error cometido al aproximar la función f por un polinomio

En nuestro ejemplo podríamos estimar el error que se comete al calcular f a través de P_6 en $x = -0,5$.

Para resolver esto, hay que hallar un número positivo ξ tal que $|r(-0,5)| < \xi$. Esto significa que tenemos que acotar la expresión del resto:

$$|r(-0,5)| = \left|\frac{1}{7(z+2)^7}(-0,5+1)^7\right| = \left|\frac{0,5^7}{7}\right|\left|\frac{1}{(z+2)^7}\right|$$

Con $z \in (-1, -0,5)$. Si graficamos la función con los módulos podemos observar que en ese intervalo es menor o igual a 1.



Luego la expresión del resto se acota de la siguiente forma:

$$|r(-0,5)| \leq \left|\frac{0,5^7}{7}\right| \leq 0,00112$$

Verifiquemos esto numéricamente, para eso tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} f(-0,5) &= \ln(-0,5+2) = 0,405465 \\ P_6(-0,5) &= (-0,5+1) - \frac{1}{2}(-0,5+1)^2 + \frac{1}{3}(-0,5+1)^3 - \frac{1}{4}(-0,5+1)^4 + \\ &\quad + \frac{1}{5}(-0,5+1)^5 - \frac{1}{6}(-0,5+1)^6 = 0,404687 \end{aligned}$$

Si miramos ambos resultados coinciden en los primeros dos decimales y difieren en uno en el tercero. Si restamos se puede apreciar mejor:

$$|f(-0,5) - P_6(-0,5)| = |0,405465 - 0,404687| = 0,000778 \leq 0,00112$$

4.2.2.2. Calcular el grado del polinomio para que el error sea menor a lo deseado.

Podríamos calcular el grado mínimos necesario para que el polinomio posea un error menor o igual a 10^{-4} de la misma función $f(x) = \ln(x+2)$ cuando se quiere calcular $f(-0,5)$.

En este caso necesitamos el resto del polinomio de grado n. Por lo que tenemos que analizar cómo es el formato de la derivada de orden $n+1$ de la función.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ln(x+2)\\
f'(x) &= \frac{1}{x+2}\\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2}\\
f'''(x) &= \frac{2}{(x+2)^3}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{2{,}3}{(x+2)^4} = -\frac{3!}{(x+2)^4}\\
f^{(5)}(x) &= \frac{2{,}3{,}4}{(x+2)^5} = \frac{4!}{(x+2)^5}\\
f^{(6)}(x) &= -\frac{2{,}3{,}4{,}5}{(x+2)^6} = -\frac{5!}{(x+2)^6}
\end{aligned}$$

Si miramos las derivadas que fuimos calculando, podemos ver que el signo se va alternando, que el numerador es un factorial y el denominador esta elevado al orden de la derivada. Esto lo podemos escribir:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$$

En consecuencia, el resto para $x = -0,5$ es:

$$\exists\, z \in (-1, -0,5)/r_n(-0,5) = (-1)^n \frac{n!}{(z+2)^{n+1}} \frac{(-0,5+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Observemos que $(n+1)! = (n+1).n!$. Simplificamos y obtenemos:

$$r_n(-0,5) = (-1)^n \frac{1}{(z+2)^{n+1}} \frac{(0,5)^{n+1}}{(n+1)}$$

Queremos que el módulo sea menor a $10^{-4} = 0,0001$. Por lo tanto, podemos escribir:

$$|r_n(-0,5)| = \left|(-1)^n \frac{1}{(z+2)^{n+1}} \frac{(0,5)^{n+1}}{(n+1)}\right|$$

Como ya comentamos, en las cercanías de -1, la función $h(z) = \left|\frac{1}{(z+2)^{n+1}}\right|$ es menor a 1 y $|(-1)^n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, queda:

$$|r_n(-0,5)| \leq \left|\frac{(0,5)^{n+1}}{(n+1)}\right| \leq 0,0001$$

La inecuación la resolvemos por aproximación, o sea, vamos probando con distintos valores de n.

Si $n = 7$, entonces $\left|\frac{(0,5)^{7+1}}{(7+1)}\right| = 0,0004 > 0,0001$. No verifica lo pedido, por lo tanto, no sirve.

Si $n = 8$, entonces $\left|\frac{(0,5)^{8+1}}{(8+1)}\right| = 0,0002 > 0,0001$. Tampoco cumple lo pedido.

Si $n = 9$, entonces $\left|\frac{(0,5)^{9+1}}{(9+1)}\right| = 0,0000976 < 0,0001$. Verifica lo pedido.

En conclusión, **para tener un error menor a 10^{-4} hay que tomar un** $n \geq 9$.

4.3. Otros ejemplos

Ejemplo 4.4. Calcular aproximadamente el valor de $\sqrt[5]{33}$ con un polinomio de Taylor de grado 2 y acotar el error cometido.

Solución. La función que vamos a usar es $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Tenemos que decidir en que valor de x vamos a central al polinomio. Para eso tenemos que pensar cuál es el número cuya raíz quinta es un entero y está próximo a 33: $\sqrt[5]{32} = 2$. Por lo tanto, vamos a centrar el polinomio en $x = 32$. Calculemos el polinomio:

$$P_2(x) = f(32) + f'(32)(x-32) + \frac{f''(32)}{2!}(x-32)^2$$

con resto $r_2(x) = \frac{f'''(z)}{3!}(x-32)^3$ y $z \in (32, x)$. Las derivadas sucesivas evaluadas en 32 son:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{1/5} & &\rightarrow & f(32) &= 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{5}x^{-4/5} & &\rightarrow & f'(32) &= \frac{1}{80} \\
f''(x) &= -\frac{4}{25}x^{-9/5} & &\rightarrow & f''(32) &= -\frac{1}{3200} \\
f'''(x) &= \frac{36}{125}x^{-14/5} & &\rightarrow & f'''(z) &= \frac{36}{125}z^{-14/5}
\end{aligned}$$

Luego el polinomio queda:

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{80}(x-32) - \frac{1}{6400}(x-32)^2$$

Para aproximar $f(33)$, evaluamos $P_2(x)$ en 33:

$$f(33) \cong P_2(33) = 2 + \frac{1}{80}(33-32) - \frac{1}{6400}(33-32)^2 = 2,01234375$$

Nos resta calcular el error cometido:

$$r_2(33) = \frac{f'''(z)}{3!}(33-32)^3 \text{ con } z \in (32, 33) \text{ y } f'''(z) = \frac{36}{125}\frac{z^{-14/5}}{6}$$

Luego, acotamos el módulo observando que $g(z) = z^{-14/5}$ es una función decreciente:

$$|r_2(33)| = |\frac{6}{125}z^{-14/5}| \leq \frac{6}{125}32^{-14/5} \leq 0,000003$$

Esto significa que los primeros cinco decimales de la aproximación por Taylor van a coincidir con la raíz quinta de 33: $\sqrt[5]{33} = 2,012346617....$

Ejemplo 4.5. Si el polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en $x = 3$ es $P(x) = 5 + 4x - 3x^2$. Encontrar el polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 2$ de la función $g(x) = \frac{1}{2-f(2x-1)}$.

Solución. El polinomio de grado 2 centrado en $x = 2$ es de la forma:

$$P_2(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2$$

Las derivadas sucesivas son:

$$g(x) = \frac{1}{2-f(2x-1)} \longrightarrow g(2) = \frac{1}{2-f(3)}$$

$$g'(x) = \frac{2f'(2x-1)}{[2-f(2x-1)]^2} \longrightarrow g'(2) = \frac{2f'(3)}{[2-f(3)]^2}$$

$$g''(x) = \frac{4f''(2x-1)\,[2-f(2x-1)] + 8\,(f'(2x-1))^2}{[2-f(2x-1)]^3} \rightarrow g''(2) = \frac{4f''(3)\,[2-f(3)] + 8\,(f'(3))^2}{[2-f(3)]^3}$$

Como el polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en $x = 3$ posee la propiedad de que:

$$\begin{aligned} f(3) &= P(3) = -10 \\ f'(3) &= P'(3) = -14 \\ f''(3) &= P''(3) = -6 \end{aligned}$$

Entonces, se pueden calcular las derivadas de g a partir de éstas:

$$\begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{2-f(3)} = \frac{1}{12} \\ g'(2) &= \frac{2f'(3)}{[2-f(3)]^2} = -\frac{7}{36} \\ g''(2) &= \frac{4f''(3)\,[2-f(3)] + 8\,(f'(3))^2}{[2-f(3)]^3} = \frac{20}{27} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio de grado 2 centrado en $x = 2$ de la función g es:

$$P_2(x) = \frac{1}{12} - \frac{7}{36}(x-2) + \frac{10}{27}(x-2)^2$$

Ejemplo 4.6. El polinomio de Taylor de la función $g(x) = ln(ax + b)$ de orden 2 centrado en $x = 1$ es $P(x) = \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{32}(x-1)^2$. Hallar los valores de a y b reales, si existen.

Solución. Sabemos que:

$$\begin{aligned} g(1) &= P(1) \\ g'(1) &= P'(1) \\ g''(1) &= P''(1) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que calcular las derivadas sucesivas de g evaluadas en 1:

$$\begin{aligned} g(1) &= ln(a+b) \\ g'(1) &= \frac{a}{a+b} \\ g''(1) &= -\frac{a^2}{a+b} \end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos las derivadas sucesivas de P evaluadas en 1:

$$\begin{aligned} P(1) &= 0 \\ P'(1) &= \frac{3}{4} \\ P''(1) &= -\frac{9}{16} \end{aligned}$$

Igualamos las derivadas y resolvemos el sistema para encontrar a y b:

$$\begin{aligned} ln(a+b) &= 0 \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{3}{4} \\ -\frac{a^2}{a+b} &= -\frac{9}{16} \end{aligned}$$

La solución es $a = \frac{3}{4}$ y $b = \frac{1}{4}$.

Bibliografía

[1] Larson, R & Edward, B. (2006) *Calculo con geometría analítica*, Vol. 1 (8°ed.). México: McGraw Hill.

[2] Rabuffetti, H. (1979) *Introducción al Análisis Matemático* (7°ed.). Argentina:El ateneo.

[3] Stewart, J. (2012) *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7°ed.). México: Cengage Learning.