Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
NOTAS DERIVADAS
Parte II

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino

Índice general

Notas para Práctica 3

Derivadas

En el presente apunte se introducen algunos temas de interés con sus respectivos ejemplos. Se indica que ejercicio de la práctica se pueden realizar luego de estudiar cada sección. Es necesario leer el libro para complementar.

3.7. Derivadas sucesivas

Dada una función f, se puede calcular la función derivada f'. Como esta es una función, se podría derivar, obteniendo lo que se conoce como derivada segunda de f''. Esto se podría repetir una y otra vez. A estas nuevas funciones se las conoce como derivadas sucesivas de una función f ,o la derivada de orden n de f. Por ejemplo, se pide calcular la cuarta derivada de la función $f(x) = xe^x$. Para poder encontrar dicha derivada hay que derivar cuatro veces:

$$\begin{aligned}
f'(x) = e^x + xe^x &\implies f'(x) = e^x(1+x) \\
f''(x) = e^x + (1+x)e^x &\implies f''(x) = e^x(2+x) \\
f'''(x) = e^x + (2+x)e^x &\implies f'''(x) = e^x(3+x) \\
f^{\hat{i}v}(x) = e^x + (3+x)e^x &\implies f^{iv}(x) = e^x(4+x)
\end{aligned}$$

Se puede denotar en forma de números romanos o simplemente se pone entre paréntesis el número: $f^{iv}(x)$ o $f^{(4)}(x)$.

Observación. Se puede resolver del ejercicio 15 al 21 inclusive.

3.8. Derivada de funciones implícitas.

Hasta ahora, se ha trabajado con expresiónes donde se tiene a la variable y en función de la variable x, a esto se conoce como la expresión de una formula en for-

-ma explicita, ejemplo: $y = 3x + 2$, $y = ln(3x + 1)$, etc. Pero esta expresión no es siempre posible. Por ejemplo, $y^3 + 3yx + x^3 = 3$, no se podría despejar la y, por lo cual, se tiene lo que se conoce como la forma implícita.

Para derivar una función dada en forma implícita sólo hay que tener en cuenta que $y = f(x)$, por lo tanto, cuando haya que derivar y vamos a tener que usar la regla de la cadena.

Ejemplo 3.1. Derivar la función $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Solución. Según las notaciones distintas notaciones que se tienen de la derivada: y', $\frac{dy}{dx}$ o $f'(x)$, se puede resolver de distintas formas:

a) Se deriva la expresión a ambos miembros: $[x^2 + xy + y^2]' = [3]'$

$[x^2]' + [xy]' + [y^2]' = [3]' \rightarrow 2x + y + xy' + 2y.y' = 0$

Se saca factor común y se despeja se obtiene la derivada:

$y' = \frac{-(2x+y)}{x+2y}$

La derivada tambien se podría dejar en forma implicita.

b) Esto mismo se puede escribir con la notación $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(3)$

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(3) \rightarrow 2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+y)}{x+2y}$.

Observación. Se puede resolver del ejercicio 22 al 25 inclusive.

3.9. Derivada de funciones inversas

Para poder calcular derivadas de funciones inversas es necesario utilizar el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Si f es una función biyectiva con derivada finita no nula en el valor a perteneciente al dominio, entonces $g = f^{-1}$ tienen derivada finita en $b = f(a)$ y esta derivada es $\frac{1}{f'(a)}$.*

La demostración se basa en el hecho de que para todo $x \in Domf$ se verifica que $gof_{(x)} = f^{-1}of_{(x)} = x$. Aplicando la regla de la cadena se obtiene el resultado que afirma el teorema.

Ejemplo 3.3. Sea $f : R \rightarrow R$ una función biyectiva, tal que $f(2) = 3$ y $f'(2) = 4$. Calcular $g´(3)$ con g la inversa de f.

Solución. Se tiene que $g(3) = f^{-1}(3) = f^{-1}(f(2))$, entonces $g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 3.4. Calcular la derivada de $g : [-1, 1] \to [0, \pi]/g(x) = arccos(x)$.

Solución. Se sabe que $g(x)$ es la inversa de $f(x) = cos(x)$ y $f'(x) = -sen(x)$.

Además, por teorema, $g'(b) = \frac{1}{f''(a)}$ con $b = f(a) = cos(a)$. Entonces queda que:$g'(b) = -\frac{1}{sen(a)}$, pero no se puede dejar acá porque la derivada está en función de b no de a. Por lo tanto, hay que pensar como se hace para que aparezca la b. Se sabe que $sen^2(a) + cos^2(a) = 1$, si se despeja el $sen(a)$ queda $sen(a) = \sqrt{1 - cos^2(a)}$. Entonces se sustituye en la derivada de g: $g'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(a)}}$. Se sabe que $b = cos(a)$, por lo que queda $g'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$. Como b es cualquier elemento del dominio de g, se lo puede reemplazar por x para obtener:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Observación. Se puede resolver del ejercicio 26 al 28 inclusive.

3.10. Diferencial de una función

Cuando se trabaja con derivada se dan varias notaciones posibles, entre ellas se tiene $f'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$. Muchos se habrán preguntado a qué se debe esta segunda notación, esto se puede justificar explicando que es un diferencial. Para esto hay que recordar la definición de derivada en un valor x del dominio de la función f.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Hay una propiedad de límite que indica que la diferencia entre la función f y su limite es un infinitésimo en el valor donde se calcula el límite. Esto es:

$f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(h)$ con g el infinitésimo[1] en cero.

Se considera h distinto de cero, por lo tanto, se puede multiplicar miembro a miembro y se obtiene:

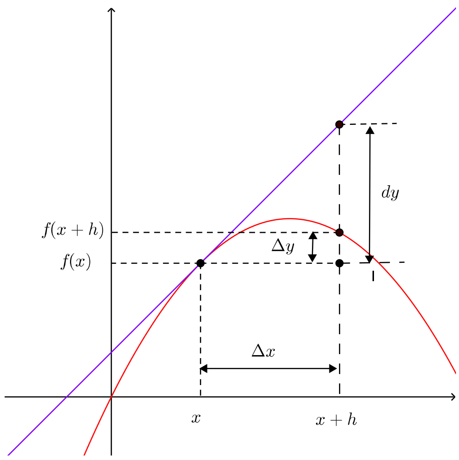
$$hf'(x) - (f(x + h) - f(x)) = hg(h)$$

Esto quiere decir que para valores extremadamente pequeños de h las funciones $hf'(x)$ y $f(x + h) - f(x)$ son aproximadamente iguales.

En la definición de derivada, h es el incremento respecto de x. Cuando se calcula la derivada se esta analizando que pasa cuando el incremento tiende a cero. En matemática se representa los incremento con el símbolo $\triangle$, por lo tanto, es muy frecuente encontrar escrito en lugar de h el símbolo $\triangle x$. Cuando se calcula

[1] Recordar que g es infinitésimo en el valor a si y sólo si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$f(x+h)-f(x)$ se esta buscando cuanto varía la imagen de la función cuando se incrementa el valor de x, entonces podemos escribir que $\triangle f(x,h) = f(x+h)-f(x)$, también se puede denotar directamente como $\triangle y = f(x+h)-f(x)$. A la expresión $hf'(x)$ se la denomina *diferencial de f en el valor x*, y se lo denota con el símbolo dy o $df(x,h)$. Utilizando la notación de incrementos quedaría que: $dy = \triangle x.f^{'}(x)$. En el siguiente gráfico se interpreta geometricamente dicha expresión.



Observación. Si se considera la función identidad, se tiene que $dy = h$. O sea, el diferencial de la función identidad, en cualquier punto y respecto de cualquier incremento h es igual a dicho incremento. Esto suele indicarse como $dx = h$. Por lo tanto, se puede escribir $dy = f'(x)dx \to \frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Ejemplo 3.5. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$, calcular el incremento en y y el diferencial de y cuando $\triangle x = 0,1$.

Solución. $\triangle y = f(1+0,1) - f(1) = 1,1^3 - 1^3 = 0,331$

Para calcular el diferencial de y, es necesario calcular la derivada: $f'(x) = 3x^2$. Por lo tanto, el diferencial es $dy = 0,1f'(1) = 0,1{,}3{,}1^2 = 0{,}3$.

Aplicaciones.

A partir del diferencial se puede aproximar valores de funciones debido a que dy es aproximadamente $f(x+h)-f(x)$. Por lo que se puede escribir que:

$$f(x+h) \cong f(x) + dy \to f(x+h) \cong f(x) + hf'(x) \tag{3.10.1}$$

Ejemplo 3.6. Dar un valor aproximado de $\sqrt[3]{29}$ sin usar calculadora.

Solución. Primero hay que distinguir quién es x y quién es h. Para eso se busca número más cercano a 29 que tenga raíz cúbica exacta y la diferencia con 29 es h: $x = 27$ y $h = 2$. Y la función es $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuya derivada es $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Se aplica (3.10.1) y obtiene: $f(29) \cong f(27) + 2.f'(27) \cong \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cong 3,111$.

Si se calcula el valor de $\sqrt[3]{29}$ con la calculadora se obtiene 3.072. Por lo cual, el error cometido aproximando es menor a 0,04.

También se puede usar para estimar errores cuando se toma mediciones aproximadas.

Ejemplo 3.7. Se midió el radio de un lata cilíndrica de 7 cm de altura y se obtuvo que era de 10 cm. Se sabe que el instrumento utilizado tiene un error de a lo sumo 0,01 cm. ¿Cuál es el error máximo que se puede cometer al calcular el volumen de la lata usando este valor?

Solución. Sea r el radio del cilindro, el volumen es $V = 7\pi r^2$. Se considera al error cometido en el radio como $\triangle r = 0,01$. Por lo tanto, el error al medir el volumen es el diferencial de V: $dV = 14\pi r.\triangle r \Rightarrow dV = 14\pi{,}10{,}0,01 \cong 4{,}4cm^3$. Mirando este valor, no se puede saber qué tan grande o chico es, para tener una mejor idea del tamaño del error es mejor usas el error relativo. Una aproximación de este se obtiene como el cociente entre el diferencial y el valor del volumen: $\frac{dV}{V} = \frac{14\pi r.\triangle r}{7\pi r^2} = \frac{\triangle r}{5r}$. Si se reemplaza por los datos se tiene que el error relativo en el volumen es $\frac{0{,}1}{5{,}10} = 0,002$. Esto significa que el error es muy bajo.

Observación. Se puede resolver del ejercicio 29 al 32 inclusive.

3.11. Teorema de Fermat y de Rolle

Para poder analizar en que punto del dominio la función alcanza un máximo o mínimo o en qué intervalos la función crece o decrece, es necesario estudiar algunos teoremas importantes que relacionan la derivabilidad y la continuidad con la existencia de extremos.

Cuando se analiza un gráfico que posee un extremo en un intervalo abierto y se calcula la recta tangente en ese punto, se observa que es horizontal, como por ejemplo en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$, la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$, y hay un mínimo. Pero obtener una recta horizontal no significa que haya un máximo o mínimo, esto se puede observar en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3$, la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$ y no se observa ningún extremo. Para resolver esta situación se tiene:

Teorema 3.8. *(Teorema de Fermat) Si f tiene derivada finita en el punto c, f alcanza un máximo o mínimo local en el punto c y c es interior al dominio, encontes $f'(c) = 0$.*

La demostración se puede encontrar en [3] página 176 - 177.

Ejemplo 3.9. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2(x-2)^2 - 3$. Analizar donde se anula la derivada primera.

Como se sabe que el gráfico es una parábola y , además, el coeficiente principal de la fórmula es positivo, se puede asegurar que tiene un mínimo. Y como esta expresado en forma canónica, dicho punto mínimo es $(2, 3)$. También, como es una función polinomia se puede asegurar que tiene derivada finita en todo punto de su dominio, en particular en $x = 2$ que es interior al domio. Resumiendo, se cumplen, las tres hipotesis del teorema:

a. Existe $f'(2)$,

b. f alcanza un mínimo en $x = 2$,

c. 2 es interior al $Df = \mathbb{R}$.

Entonces por el teorema, se puede garantizar que $f'(2) = 0$, sin necesidad de hacer el calculo.

Ejemplo 3.10. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = (x-2)^3$. ¿Se puede aplicar el teorema de Fermat?.

Para responder a esta pregunta, es necesario analizar la hipotesis del teorema:

a. exite $f'(2)$,

b. 2 es interior al $Df = \mathbb{R}$.

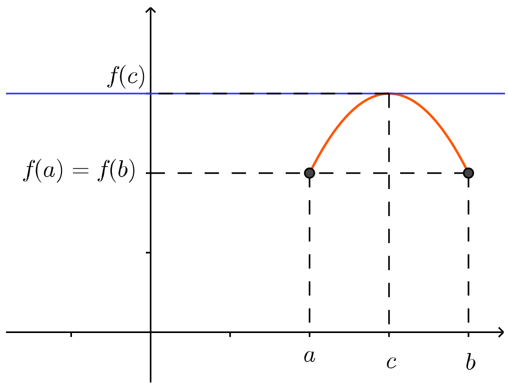
c. f no tiene máximo ni mínimo.

Por lo tanto, no se puede concluir nada, podría pasar que la derivada sea cero, como que no. En este ejemplo, $f'(x) = 3(x-2)^2$ entonces $f'(2) = 0$.

¿Qué pasa si no se conoce el punto c? En general no se conoce el máximo o mínimo a priori, por lo cual es necesario algún método para poder encontrarlos. Se puede observar en el gráfico de una función continua que si se traza una una recta l que pase por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, entonces se puede encontrar un valor $c \in (a, b)$ donde la recta tangente es paralela a l. En el caso que l sea paralela al eje x, se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.11. *(Teorema de Rolle) Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, tiene derivada finita en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Se puede visualizar en el siguiente gráfico:



La demostración se puede encontrar en [3] página 284 o en cualquiera de los restantes libros que figuran en la bibliografía.

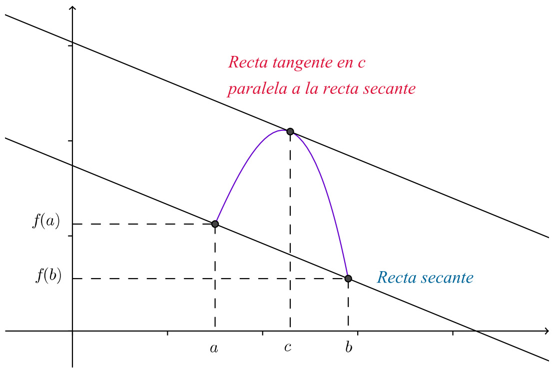
Observación. Se puede resolver del ejercicio 33 al 38 inclusive.

3.12. Teorema del Valor Medio o Lagrange y sus consecuencias

El teorema de Rolle es clave para poder demostrar el teorema del valor medio o de Lagrange. Aunque dicho teorema tiene aplicaciones directas, se usa frecuentemente para demostrar otros teoremas.

Teorema 3.12. *(de Lagrange o del valor medio) Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y tiene derivada finita en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Este teorema garantiza la existencia de la recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Se puede observar en el siguiente gráfico:



La demostración se puede encontrar en [3] página 286 o en cualquiera de los restantes libros que figuran en la bibliografía.

En terminos del ritmo o velocidad de cambio, el teorema implica que debe hacer un punto en el intervalo (a, b) en el cual la velocidad de cambio instantanea es igual a la velocidad de cambio promedio.

Ejemplo 3.13. Dos policias equipados con cinémometros habilitados por el INTI se encuentra a 10 km de distancia sobre la General Paz. Cuando pasa una auto por el primer policia, la velocidad que se registro fue de 75 km/h. Cinco minutos después, el auto pasa por el segundo policia quien registra una velocidad de 70 km/h. ¿Es posible que en este lapso el automovilista haya excesido el limite de la velocidad maxima permitida (80 km/h)?

Solución. Se $t = 0$ el tiempo cuando el automovilista pasa por la primer policia. Cuando pasa por el segundo policia el tiempo es $t = \frac{5}{60}h = \frac{1}{12}h$. Si $e(t)$ representa el espacio recorrido en t horas, se tiene que $e(0) = 0$ y $e\left(\frac{1}{12}\right) = 10$. Con estos datos se puede calcular la velocidad promedio del automovilista: $\frac{e\left(\frac{1}{12}\right)-e(0)}{\frac{1}{12}-0} = \frac{10-0}{\frac{1}{12}} =$ 120km/h. Por lo tanto, según el teorema del valor medio, existe algun instante c entre 0 y $\frac{1}{12}$h en el cual $v(c) = e'(c) = 120$km/h.

Observación. Se puede resolver del ejercicio 39 al 45 inclusive.

Bibliografía

[1] Larson, R & Edward, B. (2006) Calculo con geometria analitica, Vol. 1 (8°ed.). México: McGraw Hill.

[2] Rabuffetti, H. (1979) *Introducción al Análisis Matématico* (7°ed.). Argentina:El ateneo.

[3] Stewart, J. (2012) Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7°ed.). México: Cengage Learning.