Análisis Matemático A
(para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
NOTAS DE DERIVADAS
Parte I

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino

Índice general

Notas para Práctica 3

Derivadas

3.1. Importancia

Las derivadas están relacionadas con las rectas tangentes. Tanto las derivadas como las rectas tangentes, conforman una herramienta muy importante en el estudio de funciones y en la aproximación de las mismas.

Algunos ejemplos:

- Es mucho más sencillo trabajar con una función lineal (una recta es la representación de una función lineal) en lugar de hacerlo con una función que podría ser más compleja para su estudio.

- La información de la derivada nos brinda facilidades para el estudio de una función, como ser intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otras cosas. Más adelante se estudiará esto.

3.2. Pendiente de la recta tangente

Para estudiar las derivadas debemos hablar de rectas tangentes a una función. Entonces, primero hay que definir qué es una recta tangente. Pero, antes, hablemos sólo de tangente (sin recta). Vamos a ir desde el aspecto intuitivo hasta llegar al formal.

¿A qué se llama tangente?

Recordemos por un momento las funciones trigonométricas. En un triángulo rectángulo como el de la figura 1, tomamos el ángulo que está en el vértice P — el que forma el segmento horizontal con el diagonal —, entonces, la tangente que corresponde a ese ángulo (llamémoslo alfa) es el número que surge de dividir la longitud del lado vertical (el opuesto al ángulo) sobre la longitud del lado horizontal (adyacente al ángulo). Recordando la regla mnemotécnica SOH-CAH-TOA significa: $tg(\alpha) = \frac{O}{A}$

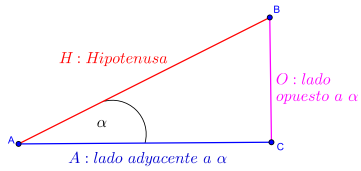


Figura 3.2.1: Triángulo rectángulo.

Por ejemplo, si el lado opuesto mide 2cm y el adyacente 4cm, nos queda que la tangente es

$tg(\alpha) = \frac{2cm}{4cm} = \frac{1}{2} = 0,5$. Las unidades se simplifican y la tangente de alfa queda con el valor de 0,5, que se lo conoce como una medida relativa.

¿Qué pasa si prolongamos la diagonal del triángulo (hipotenusa) y el lado adyacente, y formamos un triángulo más grande (ver la figura 2)? El nuevo triángulo que se forma es semejante con el anterior. Es decir, tiene los lados proporcionales. Entonces, la relación lado opuesto dividido lado adyacente da el mismo resultado. En este mismo ejemplo, de la figura 2:

$tg(\alpha) = \frac{2cm}{4cm} = \frac{3cm}{6cm} = \frac{1}{2} = 0,5$

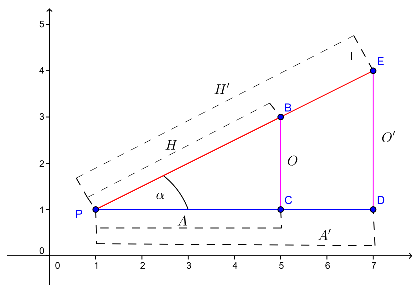


Figura 3.2.2: Triángulo $\overset{\triangle}{BPC}$ semejantes a $\overset{\triangle}{EPD}$.

Estos dos triángulos son semejantes, porque si bien la longitud de los lados es diferente, los ángulos tienen la misma medida. Lo que vemos es que la tangente del ángulo no varía, es decir, no depende del tamaño del triángulo, sino que depende del ángulo que forman la hipotenusa con el lado adyacente.

Pero, ¿qué cuenta hacemos para calcular la longitud del lado opuesto? Restamos los valores que toma la y. En este caso 4–1 $= 3$. (En la figura 3 es el segmento rojo que está sobre el eje y.) Y para calcular la longitud del lado adyacente, restamos los valores que toma la x: 7–1 $= 6$. (Segmento fucsia sobre el eje x.)

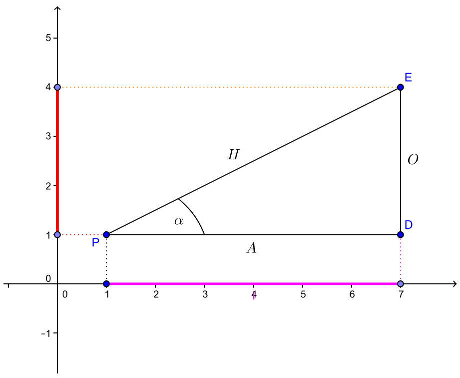


Figura 3.2.3: Cociente dependiente del ángulo.

Entonces, si a los valores de la y, los llamamos y_1 e y_2. Y, a los de la x, x_1 y x_2. La cuenta la podríamos escribir así:

$$tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y, recordando funciones lineales, esta cuenta es la que hacíamos para calcular la pendiente de la recta que pasaba por dos puntos. En el gráfico serían los puntos P y B. Es decir, estaríamos calculando la pendiente de la recta que une a los puntos P y B (la hipotenusa). Por lo tanto:

> La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma esa recta con una horizontal paralela al eje x, o con el mismo eje x, tomando el sentido positivo. Es decir, si m es la pendiente de la recta (en este caso, que pasa por la hipotenusa), entonces:
> $tg(\alpha) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$

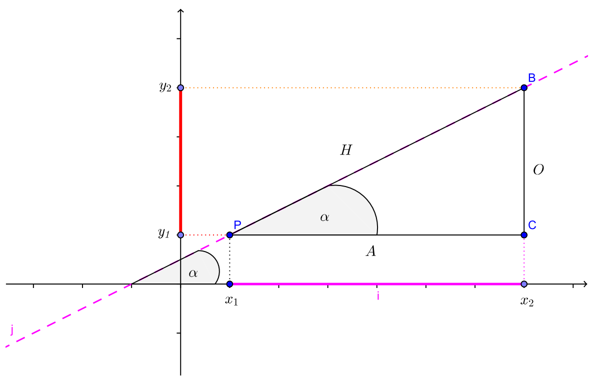


Figura 3.2.4: *Recta que pasa por la hipotenusa*

Ahora, supongamos que esos dos puntos (P y B) son dos puntos que pertenecen a una determinada función $f(x)$. Por lo tanto, los valores que toma la y serían los valores que toma la función para los dos equis determinados. Entonces, la cuenta que habíamos planteado antes quedaría de esta forma:

$$tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

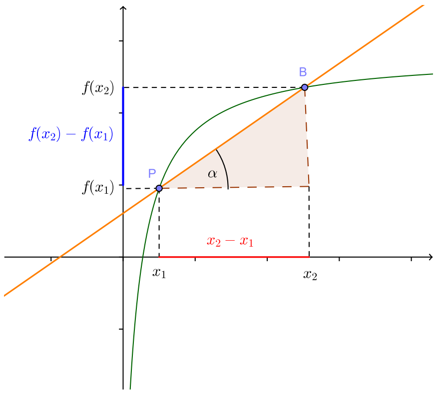


Figura 3.2.5: Recta secante.

En este punto hacemos un alto, y nos surgen un par de preguntas:

a. ¿Cómo podemos calcular esa pendiente de la recta si necesitamos dos puntos para hacerlo y en la tangente tenemos uno sólo?

b. Las rectas secantes cortan a la función en, por lo menos, dos puntos (Verdadero). Entonces, ¿las rectas tangentes son las que no cortan a la función? ¿Sólo la llegan a tocar en un punto? (Falso).

En muchos libros y apuntes figura esto último como definición de recta tangente. Sin embargo es falso. Veremos algunos ejemplos en donde esto no se cumple tratando de responder a la segundo ítem, dejando la solución a la primera pregunta para más adelante.

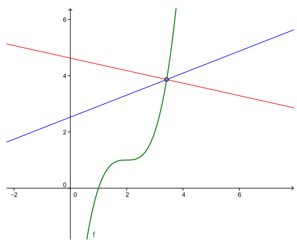


Figura 3.2.6: Dos rectas que cortan al gráfico en un sólo punto y NO son tangentes a la curva.

En la figura 3.2.6, tanto la recta roja como la azul cortan al gráfico de $f(x)$ sólo en el punto A. Sin embargo, ninguna de las dos es una recta tangente. Se podría pensar que una recta tangente no debe "cortar" al gráfico de la función, es decir, atravesar de un lado a otro. Sin embargo, esto también es falso como se observa en el siguiente grafico:

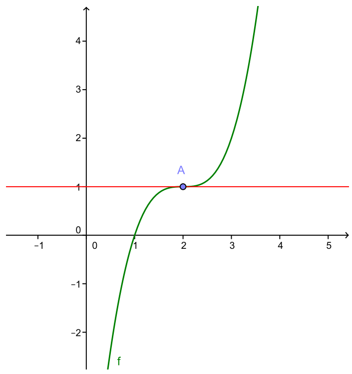


Figura 3.2.7: La recta tangente corta al gráfico.

La recta roja atraviesa el gráfico de la función $f(x)$ en el punto A y, esta recta sí es tangente al gráfico de $f(x)$ en ese punto. Entonces, hasta el momento vimos rectas que cortan en un punto a una función, y algunas son tangentes y otras no.

Veamos más ejemplos.

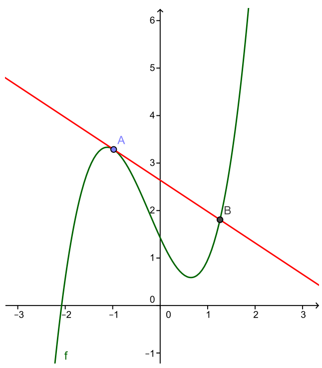


Figura 3.2.8: Recta tangente que corta a la curva en dos puntos.

En la figura 3.2.8, la recta roja es tangente al gráfico de la función $f(x)$ en el punto A, pero vemos que corta a la función en otro punto, el B.

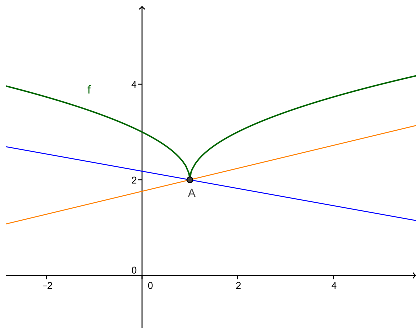


Figura 3.2.9: Dos rectas que rozan a la curva en un punto pero NO son tangentes

En la figura 3.2.9 vemos que tanto la recta roja como la azul rozan al gráfico de la función en el punto A, sin embargo, ninguna de las dos son tangentes a dicho gráfico. Es más, esta función no admite recta tangente en ese punto.

3.2.1. Algunas precisiones

Vimos varios ejemplos donde la idea tan simplista de pensar que una recta tangente es la que toca sólo en un punto al gráfico de una función no es cierta. Vimos cómo rectas que sólo tocan en un punto al gráfico de una función no son tangentes y, por el contrario, otras que cortan en dos puntos (podrían ser más) son tangentes. Precisando un poco más vamos a aclarar algunas cuestiones:

- El gráfico de una función podría admitir o no recta tangente en un determinado punto.
- Si el gráfico de una función tiene recta tangente en un punto, esta recta es única (no puede haber más de una).
- El gráfico de una función podría tener distintas rectas tangentes en diferentes puntos.
- El gráfico de una función podría tener recta tangente en algunos puntos y, en otros, no.

Por ejemplo, en la figura 3.2.9 que hemos visto anteriormente, se observa que el gráfico de la función $f(x)$ admite recta tangente en todos los puntos, salvo en el punto A. En cambio, en la figura 3.2.10 vemos que el gráfico de la función $f(x)$ tiene una recta tangente en el punto A (la recta roja), otra en el punto B, la azul y, otra en el C, la amarilla. Una función de este estilo admite recta tangente en todos los puntos de su gráfico (en los infinitos puntos de su gráfico) y, todas esas rectas, son diferentes.

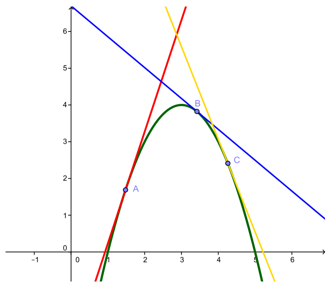


Figura 3.2.10: Rectas tangentes en diferentes puntos de un mismo gráfico.

Por el contrario, en la figura 3.2.11, tenemos dos puntos distintos, A y B, en donde la recta tangente al gráfico de la función es la misma.

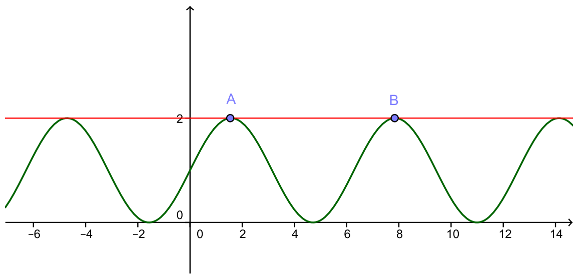


Figura 3.2.11: La misma recta es tangente al mismo gráfico en diferentes puntos.

Una idea intuitiva, de lo que es una recta tangente, que sí funciona bien, salvo alguna excepción que veremos, es la siguiente:

Pensemos el gráfico de la función como un camino (por supuesto que los gráficos no tienen ancho y un camino sí, pero nos estamos abstrayendo). Imaginemos que, por ese camino o autopista se mueve un auto (vamos a llamarlo auto1) en el sentido de izquierda a derecha mirando el eje x. En el punto donde queremos graficar la recta tangente, a ese auto se le rompe la dirección, es decir, continua en línea recta con la dirección en que se movía. De esta forma, el auto1 sigue por una recta. Ahora hay que imaginar lo mismo pero con otro auto (auto2) que viene en sentido inverso, de derecha a izquierda. También, en el mismo punto, a este auto2 se le romperá la dirección y se desviará por una recta. Si la recta por donde salió el auto1 es la misma que la del auto2 (aunque van a ir en sentido opuesto), esa es la recta tangente. Si son diferentes decimos que no tiene recta tangente en ese punto. Miremos la figura 13, el punto A sería nuestro auto1 que se va moviendo de izquierda a derecha, hacia el punto C. El punto B sería el auto2 que se mueve, también hacia C pero de derecha a izquierda. En el punto C, A seguiría con la dirección hacia arriba (por la recta roja). En cambio B seguiría hacia la izquierda *(por la azul). Claramente, las rectas son otras. Por lo tanto, este gráfico no admite recta tangente en ese punto (el C).*

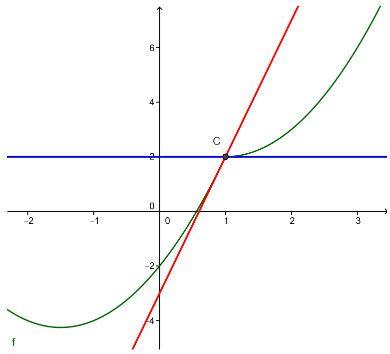


Figura 3.2.12: Dos rectas distintas para un mismo punto. Por lo tanto, NO existe recta tangente en ese punto.

Algunas precisiones más:

- Si la recta por donde salen despedidos esos móviles tiene que ser la misma, es evidente que el gráfico debe ser continuo. Es decir, en el punto que nos interesa, no puede haber cortes ni saltos.
- De lo anterior concluimos que, para que el gráfico de una función acepte recta tangente en un punto, la función debe ser continua en dicho punto.
- También, el punto debe ser interior al dominio. Es decir, no podríamos calcular la recta tangente de una función en un borde porque no nos podríamos mover del otro lado.
- Vimos que la función debe ser continua para que tenga recta tangente pero ¿sólo alcanza con eso? No. En el punto C de la figura 13, la función es continua, sin embargo las rectas no coinciden. Los puntos donde vemos que esas rectas no coinciden son puntos donde el gráfico de la función presenta algún cambio brusco del sentido, formando un quiebre o algún borde filoso.
- ¿En qué se relaciona todo esto con la derivada? Una recta tangente, como cualquier recta (salvo la vertical) tendrá una ecuación de esta forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente de esa recta. Cuando calculemos la derivada de una función, en un punto, ese cálculo nos dará dicha pendiente. Es decir, si la derivada de una función existe en un punto, en ese punto existirá la recta tangente al gráfico de la función. Y la pendiente de esa recta será el valor de la derivada.

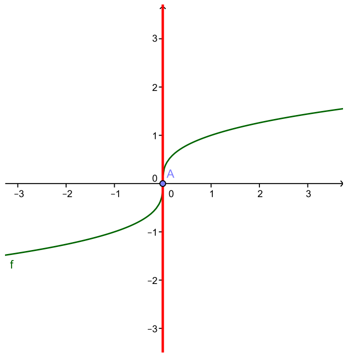


Figura 3.2.13: Recta tangente vertical (pendiente infinita): $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3.2.2. Un caso donde esta idea no funciona

Habíamos dicho que había algunos casos donde la idea de los móviles que se salen del camino no funcionaba. Es el caso de la figura 3.2.13. Si aplicamos la misma idea, en $x = 0$ sucede lo siguiente:

El móvil que viene por la rama izquierda del cero, moviéndose de izquierda a derecha, en dicho punto continuará por la recta roja hacia arriba, en forma vertical. Y el móvil que se mueva por la rama derecha de la función, acercándose al cero por la rama derecha, saldrá por la misma recta, hacia abajo.

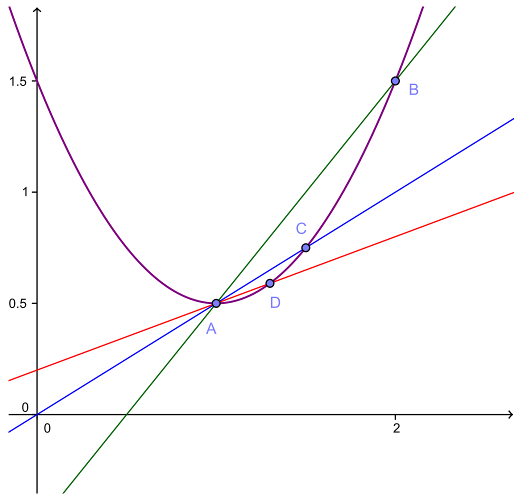
Por lo tanto, si existiera la recta tangente sería la recta vertical, de ecuación $x = 0$, pero ésta no tiene la ecuación genérica de las rectas $y = mx + b$. A medida que la pendiente (el valor de m) es más grande, la recta tendrá una inclinación mayor, es decir, se va haciendo cada vez más vertical. De una recta vertical, se dice que tiene pendiente infinita, pero esto no es un valor. Por lo tanto, la derivada de una función de este estilo nos dará infinito y diremos que no existe derivada en dicho punto, por lo que no existirá recta tangente. Más adelante veremos esto en forma analítica.

3.2.3. Un poco más de idea intuitiva

Ahora volvemos a la pregunta 1 que nos habíamos hecho y trataremos de responderla: ¿cómo calcular la pendiente de esa recta si necesitamos dos puntos y tenemos uno solo?

Sigamos con esta idea informal de los dos móviles que se mueven y trataremos de calcular el valor de la pendiente de una recta tangente con un ejemplo puntual. Elegiremos como función $f(x) = (x-1)^2 + 0{,}5$ y el punto donde queremos calcular la pendiente de la recta tangente tendrá la abscisa $x_0 = 1$. Entonces, el punto lo llamaremos A y estará formado por $A = (x_0, f(x_0)) = (1, f(1)) = (1, 0{,}5)$. Lo que haremos es calcular la pendiente de algunas rectas secantes que pasen por el punto A. Eso lo sabemos hacer porque podemos tener dos puntos, como por ejemplo el $B = (2, f(2)) = (2, 1{,}5)$. Como dijimos antes, restamos los valores de las y, hacemos lo mismo con las x y lo dividimos: $m = \frac{1{,}5-0{,}5}{2-1} = 1$ Pero, imaginamos que el móvil (el auto) se empieza a mover hacia el punto A. Si bien no podríamos hacer este cálculo con el mismo punto A porque nos quedaría una división por cero, sí podemos hacer el cálculo con puntos muy cercanos al A. Debajo mostramos una tabla con estos cálculos y un gráfico con dos de esas rectas secantes.

x_o	$f(x_o)$	m
1.5	0.75	
1.4	0.66	0.9
1.3	0.59	0.7
1.2	0.52	0.7
1.1	0.51	0.1
1.01	0.5001	0.099
1,001	0.500001	0.00099
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0.5	



Observando la tabla vemos que las pendientes se acercan al valor 0. Ahora comprobaremos si, el móvil que viene del otro lado, también se acerca a dicho valor. Ya que dijimos que debería ser la misma recta.

x_o	$f(x_o)$	m
0	1.5	
0,2	1,14	-1,8
0,4	0.86	-1,4
0,6	0.66	- 1
0,8	0.54	- 0.6
0,9	0.51	-0.3
0,99	0.5001	-0.11
0,999	0.500001	- 0.011
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0.5	

Efectivamente, también se acercan al valor 0. Por lo tanto, podríamos concluir que la pendiente de la recta tangente, será 0. Lo que es equivalente a decir que la derivada, en dicho punto, vale ese valor. Aunque todavía esto es muy informal ya que el número 0 es un número que estamos observando, pero no sabemos si es, exactamente, ese número.

3.3. Derivada. Definición formal

En el ejemplo anterior, vimos, de modo informal, que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ a $f(x)$ era 0. ¿Cómo lo haríamos de manera formal? Vemos que, al acercarse un punto al otro, estamos tomando un límite. Límite cuando C se acerca a A. Pero ¿cómo lo escribimos de manera formal? Al punto donde queremos calcular la pendiente de la tangente (su derivada) lo llamaremos x_0 en lugar de x_1. En este caso, $x_0 = 1$. Y el segundo x, como x_2, lo pensaremos como que es el x_0 más un corrimiento, que llamaremos h. Por lo tanto, lo que queremos, es que ese corrimiento se vaya achicando, es decir, ese h tiene que tender a cero. Como se ve en la siguiente figura.

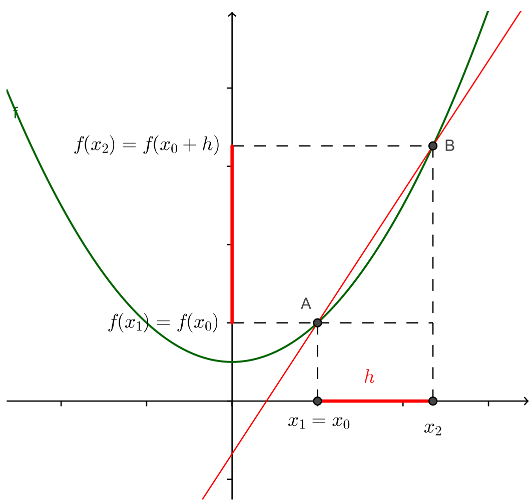


Figura 3.3.1: Descripción de notación

Por lo tanto queda:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Reemplazando el $x_0$por 1:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

Aunque si hacemos tender el h a cero nos queda una indeterminación del tipo 0 sobre 0. Por lo tanto, debemos desarrollar este límite remplazando en la función:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)^2+0{,}5-0{,}5}{h}$$

Que sigue siendo una indeterminación. Desarrollamos simplificamos y queda:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$$

Que era lo que esperábamos por los cálculos provisorios que habíamos hecho. Por lo tanto, ahora confirmamos, de manera formal, el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en $x=1$. Dicho valor es 0. Y dijimos que era el valor de la derivada. Entonces la derivada de la función en $x=1$ es 0. Y esto se anota de la siguiente manera: $f'(1)=0$

Observación. Se debe tener en cuenta que, si bien en el gráfico se tomó un h positivo para representarlo, este valor de h tiende a cero tanto por izquierda como por derecha.

Entonces, la derivada en un x_0 genérico es la siguiente:

Definición. Sea $f(x): A\subset R\to R$ y $x_0$es un punto interior a su dominio (interior a A). Entonces, si existe el siguiente límite, diremos que es el valor de la derivada de $f(x)$en ese punto $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

3.3.1. Ejemplos donde no existe la derivada

Hemos visto cómo algunas funciones no tenían recta tangente en algún punto en particular. Veamos qué pasaría si quisiéramos calcular el límite indicado en la definición. Por ejemplo el de la figura 3.2.12. Es una función partida, para ciertos valores de x tiene una fórmula y otra, para otros. La fórmula es la siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1)(x+2)-4 & si\ x<1 \\ (x-1)^2+2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Como queremos calcular el valor de la derivada en $x=1$ hacemos el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Pero este límite se abre en dos posibilidades, si h es positivo usaríamos la fórmula que está en la segunda línea para hacer el cálculo y, si h es negativo, la de la primera. Quedando:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)^2+2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h = 0 & si\ h>0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{(1+h)(1+h+1)(1+h+2)-4-2}{h} = (*) & si\ h<0 \end{cases}$$

$$(*) = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^3+6h^2+11h+6-6}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h(h^2+6h+11)}{h} = \lim_{h\to 0^-}(h^2+6h+11) = 11$$

Como $11 \neq 0$ este límite no existe, por lo tanto, la derivada tampoco. Con lo cual, la recta tangente en ese punto no existe. Cabe destacar que esto era lo que habíamos visto en el gráfico: si nos movíamos de izquierda a derecha (en este caso h es negativo) la recta por donde el supuesto móvil continuaría era hacia arriba con una inclinación muy pronunciada. En este caso el límite dio 11. Por el contrario, si nos movíamos de derecha a izquierda (con h positivo) la recta era horizontal. Los cálculos concuerdan ya que nos dio cero.

Otro caso particular que habíamos visto era el de la función raíz cúbica, en el valor $x=0$: $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Calculemos la derivada en $x=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\propto$$

Nos da infinito positivo dado que la h –sea positiva o negativa– queda elevada al cuadrado. Por lo tanto, este límite, tampoco existe. Aunque era lo que esperábamos viendo el gráfico, que la pendiente nos diera infinito.

Observación. Hacer los ejercicios 1, 2 y 3 de la guía de trabajos prácticos. (Opcional) Ejercicios 21, 22 y 23 Sección 2.8 de Stewart (página 163).

3.4. Función derivada

Como se comentó anteriormente, la gráfica de una función puede tener distintas rectas tangentes (una en cada punto). Y cada recta estará formada por una pendiente distinta, es decir, la derivada nos dará diferente. Entonces, podríamos querer calcular la derivada de una función en un x_0 genérico. Si lo hacemos con el ejemplo anterior, quedaría:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+1-(x_0^2+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2+1-x_0^2-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x_0+h) \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

Entonces, concluimos que la derivada genérica de la función del ejemplo es $2x_0$. Pero esto sucede para cualquier x_0, entonces:

$$f'(x) = 2x$$

Por lo tanto, la derivada es una nueva función que depende de x. En este caso es una función lineal.

Observación. Hacer los ejercicios 4 y 5 (éste es opcional) de la guía de trabajos prácticos.

3.4.1. Utilidad

¿Por qué nos interesa analizar la derivada de una función?

Respuesta: porque con las derivadas y sus rectas tangentes podemos analizar gran parte del comportamiento de una función que, de otra forma, podría ser muy difícil; como decíamos al principio de la unidad.

De la recta tangente podemos observar lo siguiente:

- En el valor de x que la calculamos, la función y su recta tangente, valen exactamente lo mismo. Esto es obvio, ya que la recta "toca" a la función en ese punto, sino no sería tangente.

- Alrededor del punto, en los puntos muy cercanos a donde calculamos la recta tangente, la función y su recta tangente, tienen valores similares. Lo cual nos va a ser útil a la hora de encontrar aproximaciones de una función.

- Más adelante se verá que con la función derivada podremos calcular extremos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, entre otras cosas.

3.4.2. Reglas prácticas para el cálculo de derivadas

Como el cálculo de los límites es bastante trabajoso y molesto, por suerte, Newton y Leibniz se nos adelantaron y dedujeron algunas reglas básicas para el cálculo de las derivadas. Las primeras reglas consisten en una tabla de derivadas que se puede utilizar siempre y cuando la función no presente problemas en el punto donde deseamos calcular. Por ejemplo, si es una función partida y queremos hallar su derivada en el punto de corte, esta regla práctica no nos servirá en los bordes y deberemos calcular los límites que hicimos anteriormente.

$f(x)$	$f'(x)$
k (k es un número real)	0
x^n(n es un número real)	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x
$ln(x)$	$1/x$
sen(x)	cos(x)
cos(x)	-sen(x)

Cuadro 3.4.1: Tabla de Derivadas

Observación. Hacer el ejercicio 6 de la guía.

3.4.3. Propiedades de las funciones derivadas

Se enuncian las siguientes propiedades:

a. **Suma o resta de funciones.**
Si una función está formada por la suma (o resta) de otras funciones, la función derivada será la suma (o resta) de sus derivadas. En símbolos:

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 + ln(x) \Longrightarrow f\,'(x) = 2x + 1/x$
Esta regla se generaliza para más de dos funciones.

b. **Producto de funciones**.
Si la función está formada por el producto de dos funciones:

$$h(x) = f(x)\,g(x) \Longrightarrow h'(x) = f\,'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Ejemplo: $f(x) = x^2\,ln(x) \Longrightarrow f\,'(x) = 2x\,ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\,ln(x) + x$

c. **División de funciones**.
Si la función está formada por la división de dos funciones:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2}{ln(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\,ln(x) - x}{ln^2(x)}$

d. **Producto de una función por un escalar**.
Esta propiedad es un caso particular de la propiedad 2. Si una función está formada por el producto entre un número y otra función, tenemos: $h(x) = k\ f(x) \Longrightarrow h'(x) = k' f(x) + k\ f'(x)$. Pero $k' = 0$. Entonces, $h'(x) = k\ f'(x)$. En conclusión:

$$h(x) = k\ f(x) \Longrightarrow h'(x) = k\ f'(x)$$

Ejemplo: $f(x) = 5\ ln(x) \Longrightarrow f'(x) = 5\frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

Observación. (Opcional) Complementar con Stewart: 3.1, 3.2 y 3.3 (páginas 174 a 198).

Hacer el ejercicio 7 de la guía de trabajos prácticos. Luego de un respiro, hacer los ejercicios 8 y 9.

3.4.4. Regla de la cadena

Para derivar una función compuesta con otra, o sea, $h(x) = (fog)(x) = f(g(x))$. Se usa la regla:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ejemplo. VER VIDEO

Observación. (Opcional) Leer Stewart sección 3.4 (páginas 198 a 205).

Hacer el ejercicio 10 de la guía de trabajos prácticos. Opcional: Stewart, ej. 7 al 46, página 205

3.5. Recta tangente

Vimos que con la derivada calculábamos la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función en un determinado punto. Luego, con la pendiente, y el punto, es muy sencillo calcular la ecuación de la recta tangente.

La ecuación de una recta cualquiera es: $y = mx + b$. Pero, en la recta tangente dijimos que la derivada en el punto nos daba la pendiente de dicha recta. Entonces:

$$m = f\,'(x_0)$$

Entonces, si reemplazamos el punto en la ecuación: $y_0 = f'(x_0)x_0 + b$.

Pero $y_0$es el valor de la función evaluada en el x_0. Por lo tanto: $f(x_0) = f\,'(x_0)x_0 + b$.

Despejamos b: $b = f(x_0) - f\,'(x_0)x_0$.

Y reemplazando en la ecuación de una recta genérica:

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{m}\ x \quad + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{b}$$

Sacando factor común la derivada en el punto queda la:

Ecuación de la recta tangente

$$y = f\,'(x'_0)(x - x'_0) + f(x'_0)$$

Observación. Hacer los ejercicios 11, 12, 13 y 14 de la guía de trabajos prácticos.

3.6. Velocidad instantánea

Supongamos que una persona nos dice que manejó desde Buenos Aires hasta Mar del Plata, es decir, 400km. Y nos informa que tardó 4 horas en todo el viaje. Un cálculo rápido que haremos es que la velocidad a la que conducía era de 100km/hora (400km / 4hs = 100 km/hora). Sin embargo, si vemos el gráfico que nos indica la posición en que estuvo en cada momento:

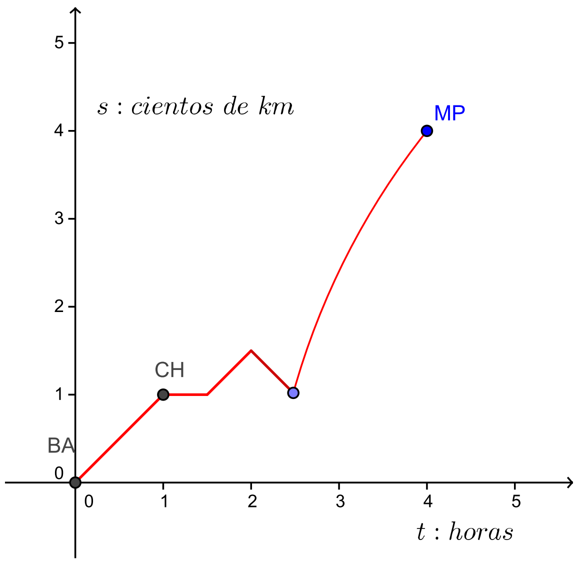


Figura 3.6.1: Espacio recorrido en cientos de km en función del tiempo transcurrido en horas.

Vemos que la persona salió de Buenos Aires a la hora cero, yendo a $100km/h$. Luego, en Chascomús, a los 100km paró media hora a tomar un café (podemos suponer), avanzó $50km$ más a la misma velocidad cuando recordó que olvidó algo en el café y regresó a buscarlo. Finalmente, recorrió $300km$ en una hora y media, a una velocidad promedio de $200km/h$. No lo hagan: es peligroso y además los pueden multar! Conclusión, la cuenta que habíamos hecho es una velocidad promedio pero, la velocidad en cada instante fue variando: $100km/h$ al principio, se estuvo $0km/hora$, continuó a $100km/h$ por media hora, luego fue a $-100km/h$ (si bien no hay velocidades negativas, esto significa que estuvo regresando en lugar de avanzar). Y finalmente, el último tramo, lo hizo a unos $200km/h$.

¿Qué cuenta hacemos para calcular las velocidades?

Dividimos las diferencias de los valores en el eje y con las diferencias en los valores de las x.

¿Y esto qué significa?

Por supuesto, es la pendiente de la recta secante. Llevado al límite, en un intervalo de tiempo muy pequeño, sería la pendiente de la recta tangente, lo que significa la velocidad en cada instante.

Por lo tanto, si la función representa la posición de un móvil en función del tiempo, la derivada, en cada punto, representa la velocidad instantánea en ese punto.