ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana

Segundo Parcial 10/06/2025 -Tema 3

1. Sean las funciones $f(x) = x^2\, e^{x-3}$ y $g(x) = 15\ln(x-2) + a(x-3)^2 + 9$.

   (a) (1 punto) Determinar el valor de a sabiendo que las funciones tienen el mismo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 3$

   $a =$..........19....................

   (b) (1 punto) Hallar dicho polinomio: ....$P(x) = 9+15(x-3)+\dfrac{23}{2}(x-3)^2$......................

   Resolución:

   $f(3) = 9.e^0 = 9$

   $f\,'(x) = 2x.e^{x-3} + x^2.e^{x-3} \quad \longrightarrow \; f\,'(3) = 15$

   $g\,'(x) = \dfrac{15}{x-2} + 2a(x-3) \quad \longrightarrow \; g\,'(3) = 15$

   $f\,''(x) = (2x + x^2).e^{x-3} + (2+2x).e^{x-3} \quad \longrightarrow \; f\,''(3) = 23$

   $g\,''(x) = -\dfrac{15}{(x-2)^2} + 2a \quad \longrightarrow \; g\,''(3) = -15 + 2a$

   de donde $a = 19$.

   El polinomio pedido es: $P(x) = 9 + 15(x-3) + \dfrac{23}{2}(x-3)^2$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^n}$ es convergente.

   ■ $x \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$

   □ $x \in (-4; 2)$

   □ $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

   □ $x \in [-4, 2)$

   Resolución:

Por criterio de raíz enésima: $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\mid \frac{3^n}{2n+1} . \frac{1}{(x+1)^n}} \mid = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2n+1}} . \sqrt[n]{\frac{1}{\mid x+1 \mid^n}} =$ $\frac{3}{|x+1|} < 1 \longrightarrow 3 < |x+1| \longrightarrow 3 < x+1$ o $x+1 < -3 \quad \longrightarrow x > 2$ o $x < -4$ entonces $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x, en $x = -4$ converge por criterio de Liebniz y en $x = 2$ la serie numérica es divergente (se puede usar criterio de comparación con la serie $\sum \frac{1}{n}$)

3. (1 punto) Hallar $a > 0$ de modo que el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = a\sqrt{x}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$ sea 16.

$a =$........3...................

Resolución:

$$\int_0^4 a\sqrt{x}\,dx = a\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3}a8 = 16 \quad \longrightarrow a = 3$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

(a) (1 punto) $\int \frac{2e^x - 10}{e^x - 5x}dx =$.................$2\ln \mid e^x - 5x \mid + C$..

Resolución:

Usando la sustitución $u = e^x - 5x$, $\int \frac{2e^x - 10}{e^x - 5x}dx = 2\ln \mid e^x - 5x \mid + C$

(b) (1 punto) $\int \frac{x^2e^{-x} + \sqrt{x} + 2}{x}dx =$........................$-xe^{-x} - e^{-x} + 2x^{\frac{1}{2}} + 2\ln|x| + C$.......

Resolución:

$$\int \frac{x^2e^{-x} + \sqrt{x} + 2}{x}dx = \int x.e^{-x}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \frac{2}{x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + 2x^{\frac{1}{2}} + 2\ln|x| + C$$

en el primer término se aplica método de partes con $u = x,\ dv = e^{-x}$

5. (1 punto) Sea la función $G(x) = \int_{x^2}^{0} e^{cos(t)}\,dt$

Calcular $G'(x) =$........................... $-\,e^{cos(x^2)}.2x$..........................

Resolución:

$G(x) = \int_{x^2}^{0} e^{cos(t)}\,dt = -\int_{0}^{x^2} e^{cos(t)}\,dt$, y por teorema fundamental del cálculo: $G'(x) = -e^{cos(x^2)}.2x$.

6. (2 puntos) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = 4$ y $g(x) = \dfrac{20x}{x^2+4}$ se debe resolver:

- ☐ $\int_{0}^{4} (g(x) - f(x))dx + \int_{1}^{0} (f(x) - g(x))dx$
- ☐ $\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{1}^{4} (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\int_{1}^{4} (f(x) - g(x))dx$
- ■ $\int_{1}^{4} (g(x) - f(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $\dfrac{20x}{x^2+4} = 4 \longrightarrow \quad x = 1,\ x = 4$

en este intervalo $g(x) \geq f(x)$, por lo tanto la respuesta es $\int_{1}^{4} (g(x) - f(x))dx$