ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana

Segundo Parcial 10/06/2025 - Tema 1

1. Sea $p(x) = 5+3(x-2)+\frac{3}{2}(x-2)^2$ el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f centrado en $x = 2$ y sea la función $g(x) = f(x^2 - 14) + x.f'(x - 2)$

   a) (1 punto) Calcular $g'(4)$:

   ....39...........

   b) (1 punto) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de g centrado en $x_0 = 4$:

   ....$P(x) = 17 + 39(x - 4)$..

   Resolución:

   Del polinomio de f se sabe $f(2) = 5$

   $f'(2) = 3$ y $f''(2) = 3$

   $g(4) = f(2) + 4f'(2) = 17$

   $g'(x) = f'(x^2 - 14) \cdot 2x + f'(x - 2) + x.f''(x - 2)$

   $g'(4) = f'(2) \cdot 8 + f'(2) + 4 \cdot f''(2) = 3 \cdot 8 + 3 + 4 \cdot 3 = 39$

   El polinomio pedido es: $P(x) = 17 + 39(x - 4)$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n - 1}$ es convergente.

   ■ $x \in \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

   □ $x \in \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right]$

   □ $x \in \left[\sqrt{3}; 4\right]$

   □ $x \in (\sqrt{3}; 4)$

   Resolución:

   Por criterio de raíz enésima, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n - 1} \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{3^n}}{4^n - 1}}.\ | x | = \frac{\sqrt{3}}{4} \ | x | < 1 \ \longrightarrow$ $|x| < \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow x \in (-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}})$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x, en ambos casos la serie numérica es divergente (término general no tiende a 0)

3. (1 punto) Hallar $a > 0$ de modo que el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 2x$ para $0 \leq x \leq 1$ sea $\frac{7}{3}$.
$a =$.....................$\frac{5}{2}$.............

Resolución:

$$\int_0^1 a\sqrt{x} - (x^2 - 2x)dx = a\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \quad \longrightarrow a = \frac{5}{2}$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

a) (1 punto) $\int \frac{\ln^3(4x+1)}{4x+1}dx =$...............$\frac{1}{16}\ln^4(4x+1) + C$.........

Resolución:

Usando la sustitución $u = \ln(4x+1)$, $\int \frac{\ln^3(4x+1)}{4x+1}dx = \frac{1}{16}\ln^4(4x+1) + C$

b) (1 punto) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx =$................$3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$.......

Resolución:
$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int x^2.\ln(x)dx = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$
en el segundo término se aplica método de partes con $u = \ln(x)$ $dv = x^2$

5. (1 punto) Sea la función $G(x) = \int_0^{x^3} sen(t^2)\,dt$

Calcular $G'(x) =$.....................$\operatorname{sen}(x^6) \cdot 3x^2$.......

Resolución:

Por teorema fundamental del cálculo: $G'(x) = \operatorname{sen}(x^6) \cdot 3x^2$.

6. (2 puntos) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$ se debe resolver:

- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{4} (g(x) - f(x))dx + \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx$
- ■ $\displaystyle\int_{-3}^{4} (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{-3}^{0} (g(x) - f(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $x^2 - x = 3x$ si $x \geq 0 \quad x = 0,\ x = 4$

$x^2 - x = -4x$ si $x < 0 \quad x = 0,\ x = -3$

en ambos intervalos $g(x) \geq f(x)$ por lo tanto $\displaystyle\int_{-3}^{4} (g(x) - f(x))dx$