

Primer Parcial - Recuperatorio - 17/06/2025 - Tema 8

1. (2 puntos) Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \operatorname{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 2x^3} = \dots\dots\dots 6 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \operatorname{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \operatorname{sen}(6x) \frac{1}{11x^2 + 2x^3} + \frac{12x^3}{x^3(11/x + 2)} = 0 + \frac{12}{2} = 6$$

2. Sea la función  $h(x) = g(f(3x + 1)) + 3$ . Se sabe que la recta tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x_0 = 1$  es  $y = 2x + 1$  y que la recta tangente al gráfico de la función  $g$  en el punto  $x_0 = 3$  es  $y = 5x + 2$ . Se pide:

a) (1 punto) Calcular  $h'(0) = \dots\dots\dots 30 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) Hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto  $x_0 = 0$ :

$\dots\dots\dots y = 30x + 20 \dots\dots\dots$

Resolución:

De la recta tangente a  $f$ ,  $y = 2x + 1$  sabemos  $f'(1) = 2$  y  $f(1) = 3$

de la recta tangente a  $g$ ,  $y = 5x + 2$  sabemos  $g'(3) = 5$  y  $g(3) = 17$

$h'(x) = g'(f(3x + 1)) \cdot f'(3x + 1) \cdot 3$  derivada de la composición

$h'(0) = g'(f(1)) \cdot f'(1) \cdot 3 = g'(3) \cdot 2 \cdot 3 = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$  pendiente de la recta tangente pedida

$h(0) = g(f(1)) + 3 = g(3) + 3 = 17 + 3 = 20$  la recta pedida pasa por el punto  $(0; 20)$

por lo tanto es  $y = 30x + 20$ .

3. (1 punto) Sea la función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 2}{x - 1}$ , entonces la ecuación de la asíntota oblicua es  $\dots\dots\dots y = 4x \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\text{Se debe calcular: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2}{x^2 - x} = 4 \text{ y } b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx =$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2}{x - 1} - 4x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2 - 4x^2 + 4x}{x - 1} = 0$$

Por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es  $y = 4x$ .

4. Sea la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 4 + 2\sqrt{x}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) (1 punto) El valor de  $a \in \mathbb{R}$  para el cual  $f$  es continua en  $x = 1$  es:.....3.....

b) (1 punto) Calcular  $f'(4) = \dots\dots\dots -\frac{1}{18} \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f(1) = a \text{ y el } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 4 + 2\sqrt{x}}{x - 1} \underset{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 3 \text{ por lo tanto } a = 3$$
$$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 1) - (2x - 4 + 2\sqrt{x})}{(x - 1)^2} \text{ entonces } f'(4) = -\frac{1}{18}.$$

5. Sea la función  $f(x) = (1 - x) \cdot \sqrt{6x + 1}$

a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- $f$  decrece en el intervalo  $(0; \frac{2}{9})$
- $f$  crece en el intervalo  $(-\infty; \frac{2}{9})$
- $f$  decrece en el intervalo  $(\frac{2}{9}; +\infty)$
- $f$  decrece en el intervalo  $(-\frac{1}{6}; +\infty)$

b) (1 punto)

- en  $x = \frac{2}{9}$  se realiza un máximo
- en  $x = -\frac{1}{6}$  se realiza un máximo
- en  $x = 1$  se realiza un mínimo
- en  $x = 0$  se realiza un mínimo

c) (1 punto) La imagen de la función es:

- $\left(-\infty; \frac{2}{9}\right]$
- $\left(-\infty; f\left(\frac{2}{9}\right)\right]$
- $(0; +\infty)$
- $\left(f\left(-\frac{1}{6}\right); +\infty\right)$

Resolución: El dominio de la función es  $\left[-\frac{1}{6}; +\infty\right)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = -\sqrt{6x+1} + \frac{3(1-x)}{\sqrt{6x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{2}{9}$$

Se estudian los intervalos  $\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{9}\right)$  y  $\left(\frac{2}{9}; +\infty\right)$ , se deduce que en  $\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{9}\right)$   $f$  crece, decrece en  $\left(\frac{2}{9}; +\infty\right)$  y en  $x = \frac{2}{9}$  alcanza un máximo.

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  se concluye que la imagen de  $f$  es  $\left(-\infty; f\left(\frac{2}{9}\right)\right]$ .