ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana

Primer Parcial - Recuperatorio - 17/06/2025 - Tema 7

1. (2 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\,\mathrm{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 4x^3}$ =............................3.............................

   Resolución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3\,\mathrm{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 4x^3} = \lim_{x \to +\infty} 3\,\mathrm{sen}(6x) \frac{1}{11x^2 + 4x^3} + \frac{12x^3}{x^3(11/x + 4)} = 0 + \frac{12}{4} = 3$$

2. Sea la función $h(x) = g(f(3x+1)) + 3$. Se sabe que la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $x_0 = 1$ es $y = 2x + 1$ y que la recta tangente al gráfico de la función g en el punto $x_0 = 3$ es $y = 5x + 2$. Se pide:

   a) (1 punto) Calcular $h'(0)$ =..............30...............................

   b) (1 punto) Hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto $x_0 = 0$:

   .... $y = 30x + 20$...

   Resolución:

   De la recta tangente a f, $y = 2x + 1$ sabemos $f'(1) = 2$ y $f(1) = 3$

   de la recta tangente a g, $y = 5x + 2$ sabemos $g'(3) = 5$ y $g(3) = 17$

   $h'(x) = g'(f(3x+1)).f'(3x+1) \cdot 3$ derivada de la composición

   $h'(0) = g'(f(1)).f'(1) \cdot 3 = g'(3) \cdot 2 \cdot 3 = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ pendiente de la recta tangente pedida

   $h(0) = g(f(1)) + 3 = g(3) + 3 = 17 + 3 = 20$ la recta pedida pasa por el punto $(0;\ 20)$

   por lo tanto es $y = 30x + 20$.

3. (1 punto) Sea la función $f : D \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{x - 1}$, entonces la ecuación de la asíntota oblicua es :.........$y = 2x - 2$.........................

Resolución:

Se debe calcular: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-x} = 2$ y

$b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-4x+2}{x-1} - 2x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-4x+2-2x^2+2x}{x-1} = -2$

Por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 2x-2$.

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4+2\sqrt{x}}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ a & si\ x = 1 \end{cases}$

   a) (1 punto) El valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual f es continua en $x=1$ es:..........3.........................

   b) (1 punto) Calcular $f'(4) =$....................$-\dfrac{1}{18}$................................

Resolución:

$f(1) = a$ y el $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-4+2\sqrt{x}}{x-1} \underset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 3$ por lo tanto $a=3$

$f'(x) = \dfrac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-1) - (2x-4+2\sqrt{x})}{(x-1)^2}$ entonces $f'(4) = -\dfrac{1}{18}$.

5. Sea la función $f(x) = (1-x).\sqrt{6x+1}$

   a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

   - ■ f decrece en el intervalo $(\frac{2}{9}; +\infty)$
   - □ f decrece en el intervalo $(0; \frac{2}{9})$
   - □ f crece en el intervalo $(-\infty; \frac{2}{9})$
   - □ f decrece en el intervalo $(-\frac{1}{6}; +\infty)$

   b) (1 punto)

   - □ en $x = -\frac{1}{6}$ se realiza un máximo
   - □ en $x = 1$ se realiza un mínimo
   - ■ en $x = \frac{2}{9}$ se realiza un máximo
   - □ en $x = 0$ se realiza un mínimo

   c) (1 punto) La imagen de la función es:

- ☐ $\left(-\infty;\ \frac{2}{9}\right]$
- ☐ $(0;\ +\infty)$
- ☐ $(f(-\frac{1}{6});\ +\infty)$
- ■ $\left(-\infty;\ f(\frac{2}{9})\right]$

Resolución: El dominio de la función es $\left[-\frac{1}{6};\ +\infty\right)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$f'(x) = -\sqrt{6x+1} + \dfrac{3(1-x)}{\sqrt{6x+1}}$

$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{2}{9}$

Se estudian los intervalos $(-\frac{1}{6};\ \frac{2}{9})$ y $(\frac{2}{9};\ +\infty)$, se deduce que en $(-\frac{1}{6};\ \frac{2}{9})$ f crece, decrece en $(\frac{2}{9}; +\infty)$ y en $x = \frac{2}{9}$ alcanza un máximo.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se concluye que la imagen de f es $\left(-\infty;\ f(\frac{2}{9})\right]$.