ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana

Primer Parcial 28/04/2025 - Tema 6

1. Sea $f : [1;\ 9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 64\ln(\frac{x}{9})$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

   (a) (1 punto) Mínimo absoluto en $x =$...........2................

   (b) (1 punto) Máximo absoluto en $x =$..........9................

   Resolución:

   $f'(x) = 4x^3 - \dfrac{64}{x}$ $\qquad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow x = -2$ (se descarta por no pertenecer al dominio) o $x = 2$.

   Usamos el teorema de Weirstrass (f es continua en el intervalo cerrado $[1, 9]$)

   Se aplica la función a los extremos del intervalo y al punto crítico, $f(2) \simeq 112$, $f(1) \simeq 141,6$ y $f(9) = 9^4 = 6561$ de donde en $x = 2$ está el mínimo absoluto y en $x = 9$ se realiza el máximo absoluto.

2. (2 puntos) Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+ax^2+7}{x^3+6}\right)^{9x+5} = e^{18}$$

   $a =$ ....2.................

   Resolución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{ax^2+1}{x^3+6}\right)^{9x+5} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^3+6}{ax^2+1}}\right)^{\frac{x^3+6}{ax^2+1}.\frac{ax^2+1}{x^3+6}(9x+5)} = e^{9a},$$

   de donde $a = 2$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+3x+1)}{x} & x \neq 0 \\ 3k-9 & x = 0 \end{cases}$.

(a) (1 punto) El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte contínua es:..........4...........................

(b) (1 punto) La pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ es :

..........$1 - \ln 5$...........

(c) (1 punto) La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ es:

..........$y = (1 - \ln 5)x + 2\ln(5) - 1$...........

Resolución:

$f(0) = 3k - 9$ y el $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+3x+1)}{x} \underset{LH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2+3x+1}(2x+3)}{1} = 3$, así $k = 4$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2+3x+1}(2x+3).x - \ln(x^2+3x+1)}{x^2} \longrightarrow f'(1) = 1 - \ln(5)$ pendiente de la recta tangente pedida.

La recta pedida pasará por el punto $(1;\ f(1)) = (1;\ \ln 5)$ por lo tanto será

$y = (1 - \ln 5)x + 2\ln(5) - 1$

4. Sea la función $f : [0;\ +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{8x^3 + 54}$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ■ f crece en el intervalo $(0;\ \frac{3}{2})$
- □ f decrece en el intervalo $(0;\ \frac{9}{4})$
- □ f crece en el intervalo $(\frac{3}{2};\ +\infty)$
- □ f decrece en el intervalo $(-\infty;\ 0)$

(b) (1 punto)

- □ en $x = -\frac{3}{2}$ se realiza un mínimo
- □ en $x = \frac{9}{4}$ se realiza un mínimo
- □ en $x = \frac{27}{8}$ se realiza un máximo

- ■ en $x = \dfrac{3}{2}$ se realiza un máximo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

- □ $\mathbb{R}$
- □ $(-\infty;\ \dfrac{3}{2})$
- □ $(0;\ +\infty)$
- ■ $\left[0;\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$

Resolución: El dominio de la función es $[0\ ;\ +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{8x^3 + 54 - x.24x^2}{(8x^3+54)^2} = \frac{-16x^3+54}{(8x^3+54)^2} f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

.

Se estudian los intervalos $(0;\ \dfrac{3}{2})$ y $(\dfrac{3}{2};\ +\infty)$, se deduce que en $(0;\ \dfrac{3}{2})$ f crece y en $x = \dfrac{3}{2}$ alcanza un máximo.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $f(0) = 0$ se concluye que la imagen de f es $\left[0;\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$