

Primer Parcial 28/04/2025 - Tema 5

1. Sea $f : [1; 9] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 64 \ln(\frac{x}{9})$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

(a) (1 punto) Máximo absoluto en $x = \dots\dots\dots 9 \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) Mínimo absoluto en $x = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{64}{x} \quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \text{ (se descarta por no pertenecer al dominio) o } x = 2.$$

Usamos el teorema de Weirstrass (f es continua en el intervalo cerrado $[1, 9]$)

Se aplica la función a los extremos del intervalo y al punto crítico, $f(2) \simeq 112$, $f(1) \simeq 141,6$ y $f(9) = 9^4 = 6561$ de donde en $x = 2$ está el mínimo absoluto y en $x = 9$ se realiza el máximo absoluto.

2. (2 puntos) Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + ax^2 + 7}{x^3 + 6} \right)^{3x+5} = e^{18}$$

$$a = \dots\dots\dots 6 \dots\dots\dots$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{ax^2 + 1}{x^3 + 6} \right)^{3x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3 + 6}{ax^2 + 1}} \right)^{\frac{x^3 + 6}{ax^2 + 1} \cdot \frac{ax^2 + 1}{x^3 + 6} (3x+5)} = e^{3a},$$

de donde $a = 6$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{x} & x \neq 0 \\ 2k - 1 & x = 0 \end{cases}$.

- (a) (1 punto) El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua es:.....2.....
- (b) (1 punto) La pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ es :
.....1 - ln 5.....
- (c) (1 punto) La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ es:
..... $y = (1 - \ln 5)x + 2 \ln(5) - 1$

Resolución:

$$f(0) = 2k - 1 \text{ y el } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{x} \underset{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 3x + 1}(2x + 3)}{1} = 3, \text{ así } k = 2$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2 + 3x + 1}(2x + 3).x - \ln(x^2 + 3x + 1)}{x^2} \longrightarrow f'(1) = 1 - \ln(5) \text{ pendiente de la recta tangente pedida.}$$

La recta pedida pasará por el punto $(1; f(1)) = (1; \ln 5)$ por lo tanto será

$$y = (1 - \ln 5)x + 2 \ln(5) - 1$$

4. Sea la función $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{8x^3 + 54}$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ☐ f crece en el intervalo $(\frac{3}{2}; +\infty)$
- ☐ f decrece en el intervalo $(-\infty; 0)$
- ☒ f crece en el intervalo $(0; \frac{3}{2})$
- ☐ f decrece en el intervalo $(0; \frac{9}{4})$

(b) (1 punto)

- ☐ en $x = \frac{27}{8}$ se realiza un máximo
- ☒ en $x = \frac{3}{2}$ se realiza un máximo
- ☐ en $x = -\frac{3}{2}$ se realiza un mínimo

☐ en $x = \frac{9}{4}$ se realiza un mínimo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

☒ $\left[0; f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

☐ $\mathbb{R}$

☐ $(-\infty; \frac{3}{2})$

☐ $(0; +\infty)$

Resolución: El dominio de la función es $[0; +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{8x^3 + 54 - x \cdot 24x^2}{(8x^3 + 54)^2} = \frac{-16x^3 + 54}{(8x^3 + 54)^2} f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

.

Se estudian los intervalos $(0; \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}; +\infty)$, se deduce que en $(0; \frac{3}{2})$ f crece y en $x = \frac{3}{2}$ alcanza un máximo.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $f(0) = 0$ se concluye que la imagen de f es $\left[0; f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$