

Primer Parcial 28/04/2025 - Tema 4

1. Sea $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-4x^3+9x^2+12x}$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

(a) (1 punto) máximo absoluto en $x = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) mínimo absoluto en $x = \dots\dots\dots -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$

Resolución:

$f'(x) = e^{-4x^3+9x^2+12x}(-12x^2 + 18x + 12)$, $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ o $x = 2$ (se descarta por no pertenecer al dominio)

Se comparan los valores $f(-1/2) = e^{-3,25}$, $f(-1) = e$ y $f(1) = e^{17}$. Entonces en $x = -\frac{1}{2}$ alcanza un mínimo y en $x = 1$ un máximo absoluto.

2. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - 18}{4\sqrt{x+1} - 8} = \dots\dots\dots 6 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - 18}{4\sqrt{x+1} - 8} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - 18}{(4\sqrt{x+1} - 8)} \frac{(4\sqrt{x+1} + 8)}{(4\sqrt{x+1} + 8)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6x - 18)(4\sqrt{x+1} + 8)}{(16x - 48)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6(x - 3)(4\sqrt{x+1} + 8)}{16(x - 3)} = 6$$

3. Sean las funciones $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Entonces:

(a) (1 punto) la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f \circ g(x)$ en $x = 3$ es: $\dots\dots\dots -\frac{1}{2}e \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) la recta tangente al gráfico de la función $f \circ g(x)$ en $x = 3$ es:

$$\dots\dots\dots y = -\frac{1}{2}ex + \frac{5}{2}e \dots\dots\dots$$

Resolución:

$f \circ g(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}$ su derivada es $(f \circ g)'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}(-\frac{1}{2})(x-2)^{-\frac{3}{2}}$, así la pendiente de la recta pedida es $(f \circ g)'(3) = e^{\frac{1}{\sqrt{3-2}}}(-\frac{1}{2})(3-2) = -\frac{1}{2}e$.

Como $f \circ g(3) = e^{\frac{1}{\sqrt{3-2}}} = e$, la recta pasa por el punto $(3; e)$ entonces su ecuación es $y - e = -\frac{1}{2}e(x - 3)$, equivalentemente $y = -\frac{1}{2}ex + \frac{5}{2}e$.

4. (1 punto) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3-x) + 3x^2 - 28}{2x-6} & x \neq 3 \\ 5k-1 & x = 3 \end{cases}$.

El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua es:

..... $k = 2$

Resolución:

$f(3) = 5k - 1$ y el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(3-x) + 3x^2 - 28}{2x-6} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3-x) + 6x}{2} = 9$. Por lo tanto el valor de k debe ser 2

5. Sea la función $f(x) = 2 + \ln(3x) + \frac{18}{x^2}$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

☐ decrece en el intervalo $(-6; 6)$

☐ decrece en el intervalo $(0; +\infty)$

☒ crece en el intervalo $(6; +\infty)$

☐ crece en el intervalo $(0; 6)$

(b) (1 punto)

☒ en $x = 6$ se realiza un mínimo

☐ en $x = -6$ se realiza un máximo

☐ en $x = -6$ se realiza un mínimo

☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

☐ $[6; +\infty)$

☐ $[8; +\infty)$

☐ $[f(0); +\infty)$

☒ $[f(6); +\infty)$

Resolución: El dominio de la función es $(0; +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{36}{x^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 6$ o $x = -6$ (este valor no pertenece al dominio, se descarta).

Se estudian los intervalos $(0; 6)$ y $(6; +\infty)$, se deduce que en $(6; +\infty)$ f crece y $x = 6$ es un mínimo.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se concluye que la imagen de f es $[f(6); +\infty)$.