Primer Parcial 28/04/2025 - Tema 3

1. Sea $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-4x^3+9x^2+12x}$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

(a) (1 punto) mínimo absoluto en $x = \dots\dots\dots -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) máximo absoluto en $x = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f'(x) = e^{-4x^3+9x^2+12x}(-12x^2 + 18x + 12), \quad f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = 2 \text{ (se descarta por no pertenecer al dominio)}$$

Se comparan los valores $f(-1/2) = e^{-3,25}$, $f(-1) = e$ y $f(1) = e^{17}$. Entonces en $x = -\frac{1}{2}$ alcanza un mínimo y en $x = 1$ un máximo absoluto.

2. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{4\sqrt{x + 1} - 8} = \dots\dots\dots 5 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{4\sqrt{x + 1} - 8} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - 15}{(4\sqrt{x + 1} - 8)(4\sqrt{x + 1} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x - 15)(4\sqrt{x + 1} + 8)}{(16x - 48)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x - 3)(4\sqrt{x + 1} + 8)}{16(x - 3)} = 5 \end{aligned}$$

3. Sean las funciones $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Entonces:

(a) (1 punto) la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f \circ g(x)$ en $x = 2$ es: $\dots\dots\dots -\frac{1}{2}e \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) la recta tangente al gráfico de la función $f \circ g(x)$ en $x = 2$ es: $\dots\dots\dots y = -\frac{1}{2}ex + 2e \dots\dots\dots$

Resolución:

$f \circ g(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$ su derivada es $(f \circ g)'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}(-\frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}}$, así la pendiente de la recta pedida es $(f \circ g)'(2) = e^{\frac{1}{\sqrt{2-1}}}(-\frac{1}{2})(2-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}e$.

Como $f \circ g(2) = e^{\frac{1}{\sqrt{2-1}}} = e$, la recta pasa por el punto $(2; e)$ entonces su ecuación es $y - e = -\frac{1}{2}e(x - 2)$, equivalentemente $y = -\frac{1}{2}ex + 2e$.

4. (1 punto) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(3-x) + 3x^2 - 28}{x-3} & x \neq 3 \\ 5k - 2 & x = 3 \end{cases}$. El valor de $k \in \mathbb{R}$ para

que f resulte continua es:

..... $k = 4$ .....

Resolución:

$f(3) = 5k - 2$ y el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(3-x) + 3x^2 - 28}{x-3} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3-x) + 6x}{1} = 18$. Por lo tanto el valor de k debe ser 4

5. Sea la función $f(x) = 2 + \ln(3x) + \frac{18}{x^2}$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- f crece en el intervalo $(0; 6)$
- f decrece en el intervalo $(-6; 6)$
- f decrece en el intervalo $(0; +\infty)$
- f crece en el intervalo $(6; +\infty)$

(b) (1 punto)

- en $x = -6$ se realiza un mínimo
- en $x = 0$ se realiza un mínimo
- en $x = 6$ se realiza un mínimo
- en $x = -6$ se realiza un máximo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

$[f(6); +\infty)$

$[6; +\infty)$

$[8; +\infty)$

$[f(0); +\infty)$

Resolución: El dominio de la función es $(0; +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{36}{x^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 6$ o $x = -6$ (este valor no pertenece al dominio, se descarta).

Se estudian los intervalos $(0; 6)$ y $(6; +\infty)$, se deduce que en $(6; +\infty)$ f crece y $x = 6$ es un mínimo.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se concluye que la imagen de f es $[f(6); +\infty)$