ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

Primer Parcial 28/04/2025 - Tema 2

1. Sea $f : [1; e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 9\ln(x)$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

   (a) (1 punto) Mínimo absoluto en $x =$...........$\frac{3}{2}$...............

   (b) (1 punto) Máximo absoluto en $x =$..........e................

   Resolución:

   $f'(x) = 4x - \frac{9}{x}$, $\quad f'(x) = 0 \quad \iff x = -\frac{3}{2}$ (se descarta por no pertenecer al dominio) o $x = \frac{3}{2}$

   Se estudian los extremos del intervalo cerrado y el punto crítico, $f(1) = 2$, $f(e) = 5,7$ y $f(3/2) = 0,85$, de donde en $x = \frac{3}{2}$ está el mínimo absoluto y en $x = e$ se realiza el máximo absoluto.

2. (2 puntos) Calcular $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+13} =$............3................

   Resolución:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+13} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+13}) \frac{(\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+13})}{(\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+13})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x-13}{(\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+13})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(6-13/x)}{x(\sqrt{1+6/x} + \sqrt{1+13/x})} = 3$$

3. Sea la función $h(x) = 5 + f(6x + e^x)$. Sabiendo que la recta tangente al gráfico de la función f en $x_0 = 1$ es $y = 3x + 1$, hallar:

   (a) (1 punto) $h'(0) =$ ....21............................

   (b) (1 punto) la recta tangente al gráfico de h en $x_0 = 0$: ....$y = 21x+9$.....................

Resolución:

De la recta tangente a f, $y = 3x + 1$ sabemos $f'(1) = 3$ y $f(1) = 4$

$h'(x) = f'(6x + e^x).(6 + e^x)$ derivada de la composición

$h'(0) = f'(1).(6 + 1) = 3.7 = 21$ pendiente de la recta tangente pedida

$h(0) = 5 + f(1) = 5 + 4 = 9$ la recta pedida pasa por el punto $(0;\ 9)$ por lo tanto es $y = 21x + 9$.

4. (1 punto) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(5x) - 1}{x^2} & x \neq 0 \\ k - \dfrac{3}{2} & x = 0 \end{cases}$. El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua es:...........-11............................

Resolución:

$f(0) = k - \dfrac{3}{2}$ y el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(5x) - 1}{x^2} \underset{LH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-5\sin(5x)}{2x} \underset{LH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-25\cos(5x)}{2} = -\dfrac{25}{2}$, así $k = -11$

5. Sea la función $f(x) = \ln(x - 4) + \dfrac{3}{x - 4} + 2$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ☐ decrece en el intervalo $(-\infty;\ 7)$
- ☐ decrece en el intervalo $(4; +\infty)$
- ■ crece en el intervalo $(7; +\infty)$
- ☐ crece en el intervalo $(4;\ 7)$

(b) (1 punto)

- ☐ en $x = 4$ se realiza un máximo
- ☐ en $x = 9$ se realiza un mínimo
- ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo
- ■ en $x = 7$ se realiza un mínimo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

- ■ $[f(7);\ +\infty)$
- ☐ $[f(4);\ +\infty)$

- ☐ $(4;\, +\infty)$
- ☐ $(-\infty;\, 7]$

Resolución: El dominio de la función es $(4;\, +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{3}{(x-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 7$. Se estudian los intervalos $(4;\, 7)$ y $(7;\, +\infty)$, se deduce que en $(7;\, +\infty)$ f crece y $x = 7$ es un mínimo.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se concluye que la imagen de f es $[f(7);\, +\infty)$.