ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

SEGUNDO PARCIAL - 5/11/2022 - TEMA 3

1. Considere la función $h(x) = x \int_0^x e^{t^2} dt + 7$

   a) (1 punto) Calcular $h''(x) =$....................$2e^{x^2}(1+x^2)$ ....

   b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ de la función h:..................$P(x) = 7 + x^2$.......................

   Resolución:

   Se deriva con regla del producto, en el segundo término se utiliza el teorema fundamental del cálculo $h'(x) = 1.\int_0^x e^{t^2} dt + x.e^{x^2}$

   derivando nuevamente: $h''(x) = e^{x^2} + e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}(1+x^2)$

   Así $h(0) = 7,\ h'(0) = 0$ y $h''(0) = 2$, el polinomio pedido es: $P(x) = 7 + 0.x + \frac{2}{2!}x^2$

2. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua en $\mathbb{R}$ y tal que $\int_{1/2}^1 \frac{f'(2x)}{x^2} dx = 10$. Calcular $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx$, sabiendo que $f(1) = 14$ y $f(2) = 8$.

   .... 34......................................

   Resolución:

   Se aplica el método de partes en $\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx$ tomando $u = f(2x)$ y $dv = x^{-3}$,

$$\int_{1/2}^1 \frac{f(2x)}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} f(2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2f'(2x)}{-2x^2} dx = -\frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2.\frac{1}{4}} f(1) + 10 = 34$$

3. (2 puntos) La suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{7^n}$ es:

   - ■ $\frac{59}{42}$
   - □ $\frac{35}{6}$
   - □ $\frac{17}{6}$

☐ $\dfrac{13}{12}$

Resolución:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n+4^n}{7^n}=2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n=2.\frac{1}{1-\frac{3}{7}}+\frac{1}{1-\frac{4}{7}}-3-\frac{10}{7}=\frac{59}{42}$ (se deben restar los dos primeros términos al utilizar la fórmula que comienza en n = 0)

4. (1 punto) El área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f(x)=\dfrac{16}{(x-2)^2}$; $y=16$; $y=4$ se calcula resolviendo:

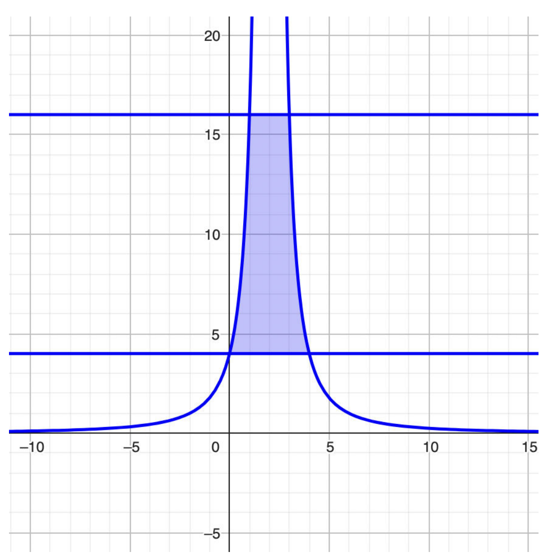
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-4)dx + \int_3^4 (f(x)-4)dx$
- ☐ $\displaystyle\int_4^{16} (f(x)-4)dx$
- ■ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx - 8 + 24$
- ☐ $\displaystyle 2\int_0^1 f(x)dx + 24$

Resolución:

Para determinar los límites de integración: $\dfrac{16}{(x-2)^2}=16 \quad\longrightarrow x=1;\ x=3$

$\dfrac{16}{(x-2)^2}=4 \quad\longrightarrow x=0;\ x=4$

El área será $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-4)dx+\int_1^3(16-4)dx+\int_3^4(f(x)-4)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx-8+24$

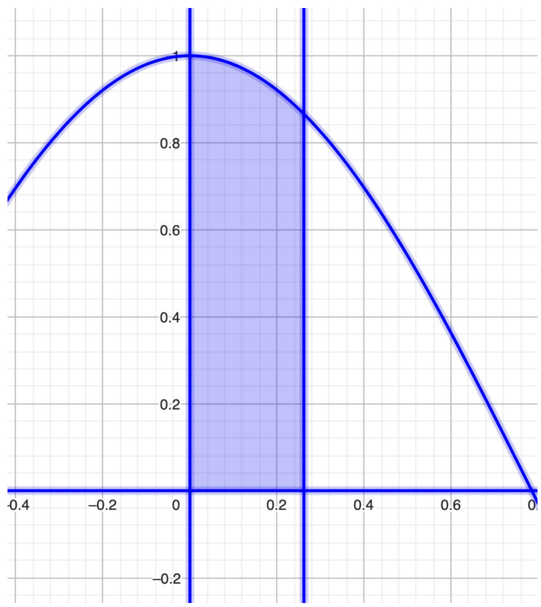


5. (1 punto) Determinar un valor de $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$ sabiendo que el área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = \cos(2x)$, el eje y, el eje x y la recta $x = a$ es $\dfrac{1}{4}$.

$a =$............$\dfrac{\pi}{12}$..........................

Resolución:

El planteo del problema es $\displaystyle\int_0^a \cos(2x)\,dx = \frac{1}{4}$, integrando tenemos $\displaystyle\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)\,\Big|_0^a = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2a)$ por lo tanto, igualando al área del dato tenemos $\mathrm{sen}(2a) = \dfrac{1}{2} \longrightarrow 2a = \dfrac{\pi}{6}$, entonces $a = \dfrac{\pi}{12}$.



6. (2 puntos) Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x} - 2x^3\cos(x)}{x^2}dx =$

...........$-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}} - 2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x) + C$....................................

Resolución:

$$\int \frac{\sqrt{3x} - 2x^3 cos(x)}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{x^2}dx - \int \frac{2x^3\cos(x)}{x^2}dx = \sqrt{3}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - 2\int x\cos(x)dx =$$
$$-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}} - 2x\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x) + C$$