

1. (1 punto) El valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+a}{x^2-6} \right)^{2x^2+1} = e^4$ es:

$a = \dots\dots\dots -4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+a}{x^2-6} \right)^{2x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-6+a+6}{x^2-6} \right)^{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a+6}{x^2-6} \right)^{2x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-6}{a+6}} \right)^{\frac{x^2-6}{a+6} (2x^2+1)} \right] = e^{2a+12} = e^4 \text{ de donde } a = -4 \end{aligned}$$

2. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{e^{x+2}-1} & x \neq -2 \\ 3a-2 & x = -2 \end{cases}$

(a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \dots\dots\dots \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = -2$

$a = \dots\dots\dots \frac{5}{6} \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{e^{x+2}-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2}-1-x-2}{(x+2)(e^{x+2}-1)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2}-1}{1 \cdot (e^{x+2}-1) + (x+2)e^{x+2}} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2}}{e^{x+2} + e^{x+2} + (x+2)e^{x+2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $f(-2) = 3a - 2$ la función es continua si $3a - 2 = \frac{1}{2} \iff a = \frac{5}{6}$

3. (1 punto) Sea $g(x)$ una función derivable tal que $g(0) = \frac{\pi}{6}$, si $\cos(g(x)) = 2x - \sqrt{x^2 + 5x + 4}$,

el valor de $g'(0)$ es igual a:

$g'(0) = \dots\dots -\frac{3}{2} \dots\dots\dots$

Resolución:

Derivando la expresión miembro a miembro: $-\operatorname{sen}(g(x))g'(x) = 2 - \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$
 evaluando en $x = 0$ y usando el dato $g(0) = \frac{\pi}{6}$ se llega a $g'(0) = -\frac{3}{2}$

4. Dada $f(x) = 15x + \frac{80}{x^3}$ Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[1; 3]$

(a) (1 punto) máximo absoluto en $x = \dots\dots 1 \dots\dots$

(b) (1 punto) mínimo absoluto en $x = \dots\dots 2 \dots\dots$

Resolución:

$$f'(x) = 15 - \frac{240}{x^4}, \quad f'(x) = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = -2$$

analizamos en el intervalo cerrado $[1; 3]$ por lo tanto el máximo se da en $x = 1$ y el mínimo en $x = 2$.

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x}e^{-36x^2+2}$

(a) (1 punto) sobre las asíntotas

- no tiene asíntotas
- $x = 0$ es asíntota vertical
- $y = x$ es asíntota oblicua
- $y = 0$ es asíntota horizontal

(b) (1 punto)

- f crece en $\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
- f decrece en $\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
- f crece en $(0; 1)$
- f decrece en $\left(0; \frac{1}{12}\right)$

(c) (1 punto)

- en $x = \frac{1}{12}$ hay un máximo absoluto de f

- en $x = 0$ hay un máximo relativo de f
- en $x = 12$ hay un mínimo relativo de f
- en $x = -\frac{1}{12}$ hay un mínimo absoluto de f

(d) (1 punto) La imagen de f es: $\left[0; f\left(\frac{1}{12}\right)\right]$

Resolución:

$$\text{Dom } f = [0; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{36x^2-2}} \underset{LH}{=} 0 \text{ por lo tanto } y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ no hay asíntota vertical}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-36x^2+2}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}(-72x)e^{-36x^2+2} = e^{-36x^2+2} \left(\frac{1-144x^2}{2\sqrt{x}} \right)$$

puntos críticos: $x = \frac{1}{12}$ (se descarta $x = -\frac{1}{12}$ por no pertenecer al dominio)

intervalo de crecimiento: $\left(0; \frac{1}{12}\right)$

intervalo de decrecimiento: $\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$

