

PRIMER PARCIAL 23/09/2024 - TEMA 3

1. (1 punto) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{4x^2} = 2$

$a = \dots\dots\dots 4 \text{ o } -4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{4x^2} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax) \cdot a}{8x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax)a^2}{8} = \frac{a^2}{8}$ por lo tanto $\frac{a^2}{8} = 2$ de donde $a = 4 \text{ o } a = -4$

2. (2 puntos) Dada $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x \geq 1 \\ 3a \text{ sen}(x - 1) & x < 1 \end{cases}$.

Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que g sea derivable en $x = 1$

$a = \dots\dots\dots \frac{1}{6} \dots\dots\dots$

Resolución:

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3a \text{ sen}(1+h-1) - 0}{h} = 3a$

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1 - 0}{h} = \frac{1}{2}$ (se puede calcular este límite multiplicando y dividiendo por la expresión $(\sqrt{h+1} + 1)$)

debe ser $3a = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{6}$

3. (1 punto) Sea $f(x) = e^{(x^2-4)} + 3 \cos(x - 2)$.

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 2$ es:

$\dots\dots\dots y = 4x - 4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$f(2) = e^{(2^2-4)} + 3 \cos(2 - 2) = e^0 + 3 = 4$, la recta pasa por el punto $(2, 4)$

Derivamos para calcular la pendiente:

$$f'(x) = e^{(x^2-4)}2x - 3 \operatorname{sen}(x - 2) \text{ entonces } m = f'(2) = 4$$

$$\text{la ecuación de la recta tangente: } y = mx + b : 4 = 4 \cdot 2 + b \quad \implies b = -4$$

$$\text{de donde: } y = 4x - 4$$

4. (2 puntos) Dadas las funciones $f(x) = 6x^2 \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ y $g(x) = 3x^2$, hallar $x_0 > 0$ tal que las rectas tangentes a los gráficos de f y g sean paralelas en $x = x_0$.

$$x_0 = \dots 4 \dots$$

Resolución:

Se calculan las derivadas de ambas funciones

$$f'(x) = 12x \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 6x \quad g'(x) = 6x$$

se buscan los puntos donde ambas sean iguales ya que las rectas tangentes se quieren paralelas (misma pendiente)

$$12x \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 6x = 6x \quad \longrightarrow \quad x = 0 \text{ (se descarta) o } x = 4, \text{ por lo tanto } x_0 = 4$$

5. Sea la función $f(x) = \frac{6x}{16x^2 + 1}$

a) (1 punto) sobre las asíntotas

$y = 0$ es asíntota horizontal

no tiene asíntotas

$x = 0$ es asíntota horizontal

$y = x$ es asíntota oblicua

b) (1 punto)

f crece en $\left(-\frac{1}{4}; 4\right)$

f decrece en $(0; +\infty)$

f decrece en $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$

f decrece en $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

c) (1 punto)

- en $x = 4$ hay un máximo relativo de f
- en $x = \frac{1}{4}$ hay un mínimo relativo de f
- en $x = 0$ hay un mínimo relativo de f
- en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo relativo de f

d) (1 punto) La imagen de f es: $\left[f\left(-\frac{1}{4}\right); f\left(\frac{1}{4}\right) \right]$

Resolución:

$Dom f : \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ por lo tanto $y = 0$ es AH (no tiene AO)

$$f'(x) = \frac{6(16x^2 + 1) - 6x \cdot 32x}{(16x^2 + 1)^2} = \frac{-96x^2 + 6}{(16x^2 + 1)^2} \quad f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{4} \quad x = -\frac{1}{4} \text{ (puntos críticos)}$$

f decrece en $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ y en $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

f crece en $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo, en $x = -\frac{1}{4}$ hay un mínimo

