ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana
Segundo Parcial 07/11/2023 - Turno 2 - Tema 4

1. (1 punto) Para hallar el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+14}$ se debe calcular:

   - ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{0}(f(x)-g(x))dx + \int_{0}^{4}(g(x)-f(x))dx$
   - ☐ $\displaystyle\int_{-2}^{0}(g(x)-f(x))dx + \int_{0}^{14}(f(x)-g(x))dx$
   - ■ $\displaystyle\int_{-3}^{0}(g(x)-f(x))dx + \int_{0}^{4}(f(x)-g(x))dx$
   - ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{4}(g(x)-f(x))dx$

   Resolución:
   límites de integración: $\dfrac{x}{x^2+2} = \dfrac{x}{x+14} \quad \longrightarrow \quad x(x+14) = x(x^2+2)$ de aquí $x = 0$ es una solución además $x + 14 = x^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0 \quad \longrightarrow x = 4;\ x = -3.$
   En el intervalo $(-3;\, 0)$ se tiene $f(x) < g(x)$ y en $(0;\, 4) \quad f(x) > g(x)$ entonces la respuesta correcta es $\int_{-3}^{0}(g(x)-f(x))dx + \int_{0}^{4}(f(x)-g(x))dx$

2. (2 puntos) Hallar una función f que satisfaga: $f'(x) = (12x+4)\cdot f^{2/3}(x)$ con $f(0) = 8$.

   $f =$....................$(2x^2 + \frac{4}{3}x + 2)^3$...................

   Resolución:
   $f'(x) = (12x+4).f^{2/3}(x) \quad \longrightarrow \dfrac{f'}{f^{2/3}} = 12x + 4$

   $$\int \frac{f'}{f^{2/3}}dx = \int (12x+4)dx \quad \longrightarrow \quad 3f^{1/3}(x) = 6x^2 + 4x + C$$

   utilizando la condición inicial: $f(0) = (\frac{C}{3})^3 \quad \longrightarrow C = 6$
   Así: $f(x) = (2x^2 + \frac{4}{3}x + 2)^3$

3. Calcular las siguientes primitivas:

   a) (1 punto) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}dx =$ ....$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$...

   Resolución: aplicando el método de sustitución $u = x^2 + 3$ así $du = 2xdx$
   entonces $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$

   b) (1 punto) $\displaystyle\int x.\cos(5x)dx =$ ....$\dfrac{1}{5}x\,\mathrm{sen}(5x) + \dfrac{1}{25}\cos(5x) + C$............................

   Resolución: aplicando el método de partes: $u = x \quad \longrightarrow du = 1$ y $dv = cos(5x) \quad \longrightarrow v = \dfrac{1}{5}sen(5x)$
   entonces $\displaystyle\int x.cos(5x)dx = \frac{1}{5}x.sen(5x) - \int \frac{1}{5}sen(5x)dx = \frac{1}{5}x.sen(5x) + \frac{1}{25}cos(5x) + C$

4. (1 punto) Si la integral $\int_0^8 f(x)dx = 12$, entonces la integral $\int_0^2 x^2 f(x^3)dx$ vale:

...........4...................................

Resolución:

realizando la sustitución $u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2$ si $x = 0 \rightarrow u = 0$ y si $x = 8 \rightarrow u = 2$ entonces

$$\int_0^2 x^2 f(x^3)dx = \int_0^8 \frac{1}{3} f(u)du = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

5. Sean f una función cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ es $P(x) = 6x + x^2$ y $g(x) = f(3x) - 5f'(x)$.

   a) (1 punto) Calcular $g'(0)$: ....8...................................

   b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de la función $g(x)$ de orden 1 centrado en $x_0 = 0$:

   ....$q(x) = -30 + 8x$..

   Resolución:
   $g'(x) = 3f'(3x) - 5f''(x) \longrightarrow g'(0) = 3f'(0) - 5f''(0)$
   por el polinimio de f se tiene $p'(x) = 6 + 2x \longrightarrow p'(0) = 6 = f'(0)$ y $p''(x) = 2 \longrightarrow p''(0) = 2 = f''(0)$
   por lo tanto $g'(0) = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 8$
   El polinomio de g(x): $q(x) = g(0) + g'(0).x \longrightarrow q(x) = -30 + 8x$

6. (2 puntos) Calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} - 63 - 32^{\frac{2k}{5}}}{4^{3k+2}}$ =.................$-\frac{59}{15}$..

Resolución:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} - 63 - 2^{2k}}{2^{6k+4}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2^{6k+4}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{2^{6k+4}} =$$

$$\frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k - \frac{63}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^6}\right)^k = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - \frac{63}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{1}{15} - 4 = -\frac{59}{15}$$