ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana
Segundo Parcial 07/11/2023 - Turno 2 - Tema 3

1. (1 punto) Para hallar el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+14}$ se debe calcular:

   - ☐ $\int_{-3}^{4} (g(x) - f(x))dx$
   - ■ $\int_{-3}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{4} (f(x) - g(x))dx$
   - ☐ $\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{4} (g(x) - f(x))dx$
   - ☐ $\int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{14} (f(x) - g(x))dx$

   Resolución:
   límites de integración: $\dfrac{x}{x^2+2} = \dfrac{x}{x+14} \quad \longrightarrow \quad x(x+14) = x(x^2+2)$ de aquí $x = 0$ es una solución además $x + 14 = x^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0 \quad \longrightarrow x = 4;\ x = -3.$
   En el intervalo $(-3;\ 0)$ se tiene $f(x) < g(x)$ y en $(0;\ 4)$ $\quad f(x) > g(x)$ entonces la respuesta correcta es $\int_{-3}^{0}(g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{4}(f(x) - g(x))dx$

2. (2 puntos) Hallar una función f que satisfaga: $f'(x) = (24x + 3) \cdot f^{2/3}(x)$ con $f(0) = -8$.

   $f =$.....................$(4x^2 + x - 2)^3$....................

   Resolución:
   $f'(x) = (24x + 3).f^{2/3}(x) \quad \longrightarrow \dfrac{f'}{f^{2/3}} = 24x + 3$

   $$\int \frac{f'}{f^{2/3}}dx = \int (24x + 3)dx \quad \longrightarrow \quad 3f^{1/3}(x) = 12x^2 + 3x + C$$

   utilizando la condición inicial: $f(0) = (\frac{C}{3})^3 \quad \longrightarrow C = -6$
   Así: $f(x) = (4x^2 + x - 2)^3$

3. Calcular las siguientes primitivas:

   a) (1 punto) $\int \dfrac{x}{x^2+2}dx =$ ....$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$...

   Resolución: aplicando el método de sustitución $u = x^2 + 2$ así $du = 2xdx$
   entonces $\int \dfrac{x}{x^2+2}dx = \int \dfrac{du}{2u} = \dfrac{1}{2}\ln(u) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$

   b) (1 punto) $\int x.\cos(3x)dx =$ ....$\dfrac{1}{3}x\,\mathrm{sen}(3x) + \dfrac{1}{9}\cos(3x) + C$............................

   Resolución: aplicando el método de partes: $u = x \quad \longrightarrow du = 1$ y $dv = cos(3x) \quad \longrightarrow v = \dfrac{1}{3}sen(3x)$
   entonces $\int x.cos(3x)dx = \dfrac{1}{3}x.sen(3x) - \int \dfrac{1}{3}sen(3x)dx = \dfrac{1}{3}x.sen(3x) + \dfrac{1}{9}cos(3x) + C$

4. (1 punto) Si la integral $\int_0^8 f(x)dx = 6$, entonces la integral $\int_0^2 x^2 f(x^3)dx$ vale:

...........2....................................

Resolución:

realizando la sustitución $u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2$ si $x = 0 \to u = 0$ y si $x = 8 \to u = 2$ entonces

$$\int_0^2 x^2 f(x^3)dx = \int_0^8 \frac{1}{3} f(u)du = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

5. Sean f una función cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ es $P(x) = 6x + x^2$ y $g(x) = f(3x) - 4f'(x)$.

   a) (1 punto) Calcular $g'(0)$: ....10....................................

   b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de la función $g(x)$ de orden 1 centrado en $x_0 = 0$:

   ....$q(x) = -24 + 10x$..

   Resolución:
   $g'(x) = 3f'(3x) - 4f''(x) \longrightarrow g'(0) = 3f'(0) - 4f''(0)$
   por el polinimio de f se tiene $p'(x) = 6 + 2x \longrightarrow p'(0) = 6 = f'(0)$ y $p''(x) = 2 \longrightarrow p''(0) = 2 = f''(0)$
   por lo tanto $g'(0) = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10$
   El polinomio de g(x): $q(x) = g(0) + g'(0).x \longrightarrow q(x) = -24 + 10x$

6. (2 puntos) Calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} + 63 - 32^{\frac{2k}{5}}}{4^{3k+2}} =$..................$\frac{61}{15}$..

Resolución:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} + 63 - 2^{2k}}{2^{6k+4}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2^{6k+4}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{63}{2^{6k+4}} =$$

$$\frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k + \frac{63}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^6}\right)^k = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{63}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{1}{15} + 4 = \frac{61}{15}$$