

1. Determinar los valores de a y b reales para que se verifique:

$$\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen}(x) dx = b + a \cdot \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

a) (1 punto) $a = \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) $b = \dots\dots\dots \pi^3 \dots\dots\dots$

Resolución:

Aplicamos el método de partes a $\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen}(x) dx$ con $u = x^3$ y $dv = \operatorname{sen}(x)$, así

$$\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen}(x) dx = -x^3 \cos(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -3x^2 \cos(x) dx = \pi^3 + 3 \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

de donde $a = 3$ y $b = \pi^3$.

2. Sea $g(x) = 4 + 6x + (f(x))^3$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de g es

$$p(x) = 5 + 18x + \frac{9}{2}x^2,$$

a) (1 punto) calcular $g'(0)$: $\dots\dots\dots 18 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$:

$\dots\dots\dots P(x) = 1 + 4x - \frac{29}{2}x^2 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$g(x) = 4 + 6x + (f(x))^3 \quad \longrightarrow \quad g'(x) = 6 + 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \quad \longrightarrow \quad g''(x) = 3(2f(x) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + f^2(x) \cdot f''(x)).$$

Como se conoce el polinomio de g tenemos:

$$g(0) = 4 + (f(0))^3 = 5 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 6 + 3(f(0))^2 \cdot f'(0) = 18 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 3(2f(0) \cdot f'(0) \cdot f'(0) + f^2(0) \cdot f''(0)) = 9$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 4, \quad f''(0) = -29$$

y el polinomio pedido es: $P(x) = 1 + 4x - \frac{29}{2}x^2$

3. (2 puntos) Todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 + 1}{6n^2 + 3} \left(\frac{x - 3}{5}\right)^n$ resulta convergente son:

- ☐ $[-2; 8]$
- ☒ $(-2; 8)$
- ☐ $(-2; 8]$
- ☐ $[-2; 8)$

Resolución:

Por criterio de la raíz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^2 + 1}{6n^2 + 3} \left(\frac{x - 3}{5}\right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 1}{6n^2 + 3}} \left| \left(\frac{x - 3}{5}\right) \right| = \left| \left(\frac{x - 3}{5}\right) \right| < 1$$

por lo tanto $|x - 3| < 5 \quad \longrightarrow \quad -2 < x < 8$ en este intervalo la serie converge.
Se analizan los bordes: en ambos casos el término general no tiende a cero. Respuesta: la serie converge en $(-2; 8)$

4. (1 punto) El área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = (4 - x^2) \cdot (e^{3x} - 1)$ y el eje x se obtiene calculando:

- ☐
 $\int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$
- ☐
 $\int_{-2}^2 (f(x) - x)dx$
- ☐
 $\int_{-2}^2 f(x)dx$
- ☒
 $\int_0^2 f(x)dx - \int_{-2}^0 f(x)dx$

Resolución:

La función corta al eje x ($y = 0$); $(4 - x^2) \cdot (e^{3x} - 1) = 0$ en $x = 2$, $x = -2$ y en $x = 0$.

Se analiza el signo de la función en los intervalos: en $(-2; 0)$ la función es negativa mientras que en $(0; 2)$ la función es positiva por lo tanto la respuesta es:

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_{-2}^0 f(x)dx$$

5. Calcular las siguientes primitivas:

a) (1 punto) $\int \ln(5x)dx = \dots\dots\dots x \cdot \ln(5x) - x + C \dots\dots\dots$

Resolución: aplicando el método de partes: $u = \ln(5x) \longrightarrow du = \frac{1}{x}$ y $dv = 1 \longrightarrow v = x$
 entonces

$$\int \ln(5x)dx = x \cdot \ln(5x) - \int 1dx = x \cdot \ln(5x) - x + C$$

b) (1 punto) $\int \frac{x}{x + 15}dx = \dots\dots\dots x + 15 - 15 \ln(x + 15) + C \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots x - 15 \ln(x + 15) + C \dots\dots$

Resolución: aplicando el método de sustitución $u = x + 15$ así $du = dx$ y $x = u - 15$
 entonces

$$\int \frac{x}{x + 15}dx = \int \frac{u - 15}{u}du = \int (1 - \frac{15}{u})du = u - 15 \ln(u) = x + 15 - 15 \ln(x + 15) + C$$

6. (1 Punto) Sea $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{5t} dt$. Calcular

$F'(x) = \dots\dots\dots \frac{e^{5 \sqrt{x}}}{2 \sqrt{x}} \dots\dots\dots$

Resolución:

Por teorema fundamental del cálculo $F'(x) = e^{5 \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{e^{5 \sqrt{x}}}{2 \sqrt{x}}$.