

1. (1 punto) El área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = (4 - x^2) \cdot (e^{3x} - 1)$ y el eje x se obtiene calculando:

- ☐ $\int_{-2}^2 f(x) dx$
☒ $\int_0^2 f(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx$
☐ $\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx$
☐ $\int_{-2}^2 (f(x) - x) dx$

Resolución:

La función corta al eje x ($y = 0$); $(4 - x^2) \cdot (e^{3x} - 1) = 0$ en $x = 2$, $x = -2$ y en $x = 0$.

Se analiza el signo de la función en los intervalos: en $(-2; 0)$ la función es negativa mientras que en $(0; 2)$ la función es positiva por lo tanto la respuesta es:

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx$$

2. Determinar los valores de a y b reales para que se verifique:

$$\int_0^\pi x^3 \sin(x) dx = a + b \cdot \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

a) (1 punto) $a = \dots\dots\dots \pi^3 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) $b = \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots$

Resolución:

Aplicamos el método de partes a $\int_0^\pi x^3 \sin(x) dx$ con $u = x^3$ y $dv = \sin(x)$, así

$$\int_0^\pi x^3 \sin(x) dx = -x^3 \cos(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -3x^2 \cos(x) dx = \pi^3 + 3 \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$$

de donde $a = \pi^3$ y $b = 3$.

3. Sea $g(x) = 4 + 6x + (f(x))^3$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de g es

$$p(x) = 5 + 18x + \frac{9}{2}x^2,$$

a) (1 punto) calcular $g'(0)$: $\dots\dots\dots 18 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$:

$\dots\dots\dots P(x) = 1 + 4x - \frac{29}{2}x^2 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$g(x) = 4 + 6x + (f(x))^3 \longrightarrow g'(x) = 6 + 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \longrightarrow g''(x) = 3(2f(x) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + f^2(x) \cdot f''(x)).$$

Como se conoce el polinomio de g tenemos:

$$g(0) = 4 + (f(0))^3 = 5 \longrightarrow g'(0) = 6 + 3(f(0))^2 \cdot f'(0) = 18 \longrightarrow g''(0) = 3(2f(0) \cdot f'(0) \cdot f'(0) + f^2(0) \cdot f''(0)) = 9$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 4, \quad f''(0) = -29$$

y el polinomio pedido es: $P(x) = 1 + 4x - \frac{29}{2}x^2$

4. (2 puntos) Todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{6n^2+3} \left(\frac{x-3}{5}\right)^n$ resulta convergente son:

☐ $[-2; 8]$

☐ $(-2; 8]$

☐ $[-2; 8)$

☒ $(-2; 8)$

Resolución:

Por criterio de la raíz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^2+1}{6n^2+3} \left(\frac{x-3}{5}\right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{6n^2+3}} \left| \left(\frac{x-3}{5}\right) \right| = \left| \left(\frac{x-3}{5}\right) \right| < 1$$

por lo tanto $|x-3| < 5 \rightarrow -2 < x < 8$ en este intervalo la serie converge.

Se analizan los bordes: en ambos casos el término general no tiende a cero. Respuesta: la serie converge en $(-2; 8)$

5. Calcular las siguientes primitivas:

a) (1 punto) $\int \frac{x}{x+14} dx = \dots\dots\dots x + 14 - 14 \ln(x+14) + C \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots x - 14 \ln(x+14) + C \dots\dots\dots$

Resolución: aplicando el método de sustitución $u = x + 14$ así $du = dx$ y $x = u - 14$ entonces

$$\int \frac{x}{x+14} dx = \int \frac{u-14}{u} du = \int \left(1 - \frac{14}{u}\right) du = u - 14 \ln(u) = x + 14 - 14 \ln(x+14) + C$$

b) (1 punto) $\int \ln(4x) dx = \dots\dots\dots x \cdot \ln(4x) - x + C \dots\dots\dots$

Resolución: aplicando el método de partes: $u = \ln(4x) \rightarrow du = \frac{1}{x}$ y $dv = 1 \rightarrow v = x$ entonces

$$\int \ln(4x) dx = x \cdot \ln(4x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(4x) - x + C$$

6. (1 Punto) Sea $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{3t} dt$. Calcular

$F'(x) = \dots\dots\dots \frac{e^{3\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \dots\dots\dots$

Resolución:

Por teorema fundamental del cálculo $F'(x) = e^{3\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{e^{3\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.