

1. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - 5x + 14}{5(x-2)(3x+5)} \right)^{\frac{7}{8x+2^4}} = \dots\dots\dots e^{\frac{14}{15}} \dots\dots\dots$

Resolución:
Es una indeterminación tipo "1[∞]" entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(1 + \frac{-x^2 - 5x + 14}{5(x-2)(3x+5)} - 1 \right)^{\frac{7}{8x+2^4}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(1 + \frac{-2^4(x-2)(x+2)}{5(x-2)(3x+5)} \right)^{\frac{7}{8x+2^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(1 + \frac{1}{\frac{5(3x+5)}{-2^4(x+2)}} \right)^{\frac{7}{8x+2^4} \frac{5(3x+5)}{-2^4(x+2)} \frac{-2^4(x+2)}{5(3x+5)}} = e^{\frac{14}{5}} \end{aligned}$$

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{(2m)^2 + m^2x + 1}{m^2} & x < -4 \\ 4 & -4 \leq x < m \\ \frac{-2^3x}{2m^2 - m} & x \geq m \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar **todos** los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en $x = -4$: $m = \dots\dots\dots \frac{1}{2} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$

b) (1 punto) Determinar **todos** los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en $\mathbb{R}$: $m = \dots\dots\dots -\frac{1}{2} \dots\dots\dots$

Resolución:
 $f(-4) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(2m)^2 + m^2x + 1}{m^2} = \frac{4m^2 - 4m^2 + 1}{m^2} = \frac{1}{m^2}$ por lo tanto se pide: $4 = \frac{1}{m^2}$ de donde $m = \frac{1}{2}$ o $m = -\frac{1}{2}$
Se debe analizar continuidad en $x = m$: $f(m) = \frac{-2^3m}{2m^2 - m}$ y $\lim_{x \rightarrow m^-} f(x) = 4$ por lo tanto se pide:
 $4 = \frac{-2^3m}{2m^2 - m} \rightarrow 4 = \frac{-8}{2m - 1}$ de donde $m = -\frac{1}{2}$

3. Sea $h(x) = e^{4x} \cdot f(x)$ donde f es una función derivable tal que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 5$

a) (1 punto) Calcular $h'(1) = \dots\dots\dots 17e^4 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de h
en $x = 1$: $\dots\dots\dots y = 17e^4(x - 1) + 3e^4 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots y = 17e^4x - 14e^4 \dots\dots\dots$

Resolución:
 $h'(x) = 4e^{4x}f(x) + e^{4x}f'(x) \rightarrow h'(1) = 4e^4f(1) + e^4f'(1) = 17e^4$
la recta tangente: $y = h'(1)(x - 1) + h(1) \rightarrow y = 17e^4(x - 1) + e^43$

4. Sea la función $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} + 5$.
- a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:
- ☐ decrece en el intervalo $(0; +\infty)$
 - ☐ crece en el intervalo $(-\infty; 2)$
 - ☐ decrece en el intervalo $(-2; +\infty)$
 - ☒ crece en el intervalo $(-2; 2)$

- b) (1 punto)
- ☐ en $x = -2$ se realiza un máximo
 - ☐ en $x = 1$ se realiza un mínimo
 - ☒ en $x = 2$ se realiza un máximo
 - ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo

- c) (1 punto) La imagen de f es:
- ☒ $[4; 6]$
 - ☐ $(-\infty; 6]$
 - ☐ $(0; +\infty)$
 - ☐ $(f(-2); +\infty)$

- d) (1 punto) ¿Cuántas veces corta la recta $y = 5$ al gráfico de la función f ? :
-1.....

Resolución:

El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 4) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \quad o \quad x = -2$$

Se estudian los intervalos $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ y $(2; +\infty)$, se deduce que en $(-2; 2)$ f crece y $x = 2$ es un máximo.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ se concluye que la imagen de f es $[f(-2); f(2)] = [4; 6]$ y la función corta a la recta $y = 5$ una vez.