

1. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - e^{5x-5}}{\ln^2(x) + (x-1)^2} = \dots\dots\dots -\frac{5}{4} \dots\dots\dots$

Resolución:

Es una indeterminación tipo " $\frac{0}{0}$ " entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - e^{5x-5}}{\ln^2(x) + (x-1)^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 5e^{5x-5}}{2\ln(x)\frac{1}{x} + 2(x-1)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{20x^3 - 25e^{5x-5}}{2\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2\ln(x)\left(\frac{-1}{x^2}\right) + 2} = \frac{20 - 25}{2 + 2} = -\frac{5}{4}$$

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x < 2 \\ ax^2 - 16 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$

a) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en todo su dominio

- 1) (1 punto) $a = \dots\dots\dots 5 \dots\dots\dots$
- 2) (1 punto) $b = \dots\dots\dots 28 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$:

$\dots\dots\dots y = x + 2 \dots\dots\dots$

Resolución:

Se debe analizar continuidad en $x = 2$ y en $x = 3$

$f(2) = 4a - 16$ y $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ por lo tanto $4a - 16 = 4 \implies a = 5$.

$f(3) = 6 - a + b = 1 + b$ y $\lim_{x \rightarrow 3} ax^2 - 16 = 9a - 16 = 45 - 16 = 29$ por lo tanto $1 + b = 29 \implies b = 28$.

La ecuación de la recta tangente: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 2$, dado que $f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 4)}{(x - 2)^2}$ para $x < 2$

3. Sea f una función con derivada continua y tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{3x})}{x \cos(x)} = 12$. Determinar los valores de $f(1)$ y $f'(1)$.

- (1 punto) $f(1) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$
- (1 punto) $f'(1) = \dots\dots\dots 4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{3x}) \rightarrow f(1)}{x \cdot \cos(x) \rightarrow 0} = 12$ por lo tanto $f(1)$ debe ser igual a 0 y se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por

$L'H : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{3x})}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(e^{3x}) \cdot 3e^{3x}}{\cos(x) - x \sin(x)} = \frac{3f'(1)}{1} = 12$ de donde $f'(1) = 4$.

4. Sea la función $f(x) = \frac{e^{2x+3}}{x^2}$.

a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ☐ crece en el intervalo $(-\infty; 1)$
- ☒ crece en el intervalo $(1; +\infty)$
- ☐ crece en el intervalo $(0; 1)$
- ☐ decrece en el intervalo $(-1; +\infty)$

b) (1 punto)

- ☐ en $x = -1$ se realiza un mínimo
- ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo
- ☐ en $x = 1$ se realiza un máximo
- ☒ en $x = 1$ se realiza un mínimo

c) (1 punto) La imagen de f es:

- ☐ $(-\infty; 1]$
- ☐ $(0; f(1)]$
- ☒ $(0; +\infty)$
- ☐ $(f(1); +\infty)$

Resolución:

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x+3}x^2 - 2xe^{2x+3}}{x^4}$$
$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \quad x = 0 \text{ (está fuera del dominio)}$$

Se estudian los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ y $(1; +\infty)$, se deduce que en $(1; +\infty)$ f crece y $x = 1$ es un mínimo.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se concluye que la imagen de f es $(0; +\infty)$