

1. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 - 32x} - 4x) = \dots\dots\dots -4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 - 32x} - 4x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 - 32x} - 4x) \cdot \frac{(\sqrt{16x^2 - 32x} + 4x)}{(\sqrt{16x^2 - 32x} + 4x)} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x^2 - 32x - 16x^2}{x\sqrt{16 - 32/x} + 4x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x}{x(\sqrt{16 - 32/x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32}{\sqrt{16 - 32/x} + 4} = \frac{-32}{8} = -4 \end{aligned}$$

2. Sea la función $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$

a) g es derivable en $x = 0$ si

- 1) (1 punto) $a = \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots$
- 2) (1 punto) $b = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$

b) (1 punto) La ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x = 0$ es:

$\dots\dots\dots y = 3x \dots\dots\dots$

Resolución:

Primero se estudia continuidad: $g(0) = b$ y $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x = 0$, por lo tanto $b = 0$.

Para derivabilidad se estudia el cociente incremental:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(h^3 \sin\left(\frac{1}{h}\right) + 3h - 0 \right) \frac{1}{h} = 3$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ah - 0) \frac{1}{h} = a$$

por lo tanto $a = 3$.

La ecuación de la recta tangente es $y = g'(0)x + g(0) = 3x$.

3. (1 punto) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. El punto del gráfico de f en el cual la recta tangente tiene ecuación $y = \frac{1}{2}$ es: $\dots\dots\dots \left(1; \frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots$

Resolución:

La ecuación de la recta dada tiene pendiente igual a 0 por lo tanto $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$
además la recta y la función deben coincidir en el punto de tangencia: $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1$, el punto es $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x}{e^x} + 5$.
- a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:
- ☐ decrece en el intervalo $(-1; +\infty)$
 - ☐ crece en el intervalo $(0; 5)$
 - ☐ decrece en el intervalo $(-\infty; -1)$
 - ☒ decrece en el intervalo $(1; +\infty)$
- b) (1 punto)
- ☐ en $x = 1$ se realiza un mínimo
 - ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo
 - ☐ en $x = 5$ se realiza un máximo
 - ☒ en $x = 1$ se realiza un máximo
- c) (1 punto) La imagen de f es:
- ☐ $(0; +\infty)$.
 - ☐ $(f(-1); +\infty)$
 - ☒ $(-\infty; f(1)]$
 - ☐ $(-\infty; 1]$
- d) (1 punto) ¿Cuántas veces corta la recta $y = 5$ al gráfico de la función f ? :
-1.....

Resolución:

El dominio de la función es $\mathbb{R}$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos: $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$.

Se estudian los intervalos $(-\infty; 1)$ y $(1; +\infty)$, se deduce que en $(1; +\infty)$ f decrece y $x = 1$ es un máximo.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ se concluye que la imagen de f es $(-\infty; f(1)]$ y la función corta a la recta $y = 5$ una sola vez.