

Segundo Parcial 12/06/2023 - Turno 2 - Tema 4

1. Sean las funciones $f(x) = x^2 e^{x-4}$ y $g(x) = 24 \ln(x-3) + a(x-4)^2 + b$.

(a) Determinar los valores de a y b sabiendo que las funciones tienen el mismo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 4$

☐ (0,5 punto) $a = \dots\dots\dots 29 \dots\dots\dots$

☐ (0,5 punto) $b = \dots\dots\dots 16 \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) Hallar dicho polinomio: $\dots\dots\dots P(x) = 16 + 24(x-4) + \frac{34}{2}(x-4)^2 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f(4) = 16.e^0 = 16 \quad g(4) = b$$

$$f'(x) = 2x.e^{x-4} + x^2.e^{x-4} \longrightarrow f'(4) = 24$$

$$g'(x) = \frac{24}{x-3} + 2a(x-4) \longrightarrow g'(4) = 24$$

$$f''(x) = (2x + x^2).e^{x-4} + (2 + 2x).e^{x-4} \longrightarrow f''(4) = 34$$

$$g''(x) = -\frac{24}{(x-3)^2} + 2a \longrightarrow g''(4) = -24 + 2a$$

de donde $a = 19$ y $b = 9$.

El polinomio pedido es: $P(x) = 16 + 24(x-4) + \frac{34}{2}(x-4)^2$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^n} \text{ es convergente.}$$

☐ $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

☐ $x \in [-4, 2)$

☒ $x \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$

☐ $x \in (-4; 2)$

Resolución:

Por criterio de raíz enésima: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{(x+1)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2n+1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{|x+1|^n}} = \frac{3}{|x+1|} < 1 \rightarrow 3 < |x+1| \rightarrow 3 < x+1 \text{ o } x+1 < -3 \rightarrow x > 2 \text{ o } x < -4$ entonces $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x , en $x = -4$ converge por criterio de Leibniz y en $x = 2$ la serie numérica es divergente (se puede usar criterio de comparación con la serie $\sum \frac{1}{n}$)

3. (1 punto) Hallar $a > 0$ de modo que el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = a\sqrt{x}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 9$ sea 3.

$$a = \dots\dots\dots \frac{1}{6} \dots\dots\dots$$

Resolución:

$$\int_0^9 a\sqrt{x} dx = a \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^9 = \frac{2}{3} \cdot a \cdot 27 = 3 \rightarrow a = \frac{1}{6}$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

(a) (1 punto) $\int \frac{3e^x - 15}{e^x - 5x} dx = \dots\dots\dots 3 \ln |e^x - 5x| + C \dots\dots\dots$

Resolución:

Usando la sustitución $u = e^x - 5x$, $\int \frac{3e^x - 15}{e^x - 5x} dx = 3 \ln |e^x - 5x| + C$

(b) (1 punto) $\int \frac{x^2 e^{-x} + \sqrt[3]{x} + 2}{x} dx = \dots\dots\dots -x e^{-x} - e^{-x} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2 \ln |x| + C \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\int \frac{x^2 e^{-x} + \sqrt{x} + 2}{x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int \frac{2}{x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2 \ln |x| + C$$

en el primer término se aplica método de partes con $u = x$, $dv = e^{-x}$

5. (1 punto) Sea la función $G(x) = \int_{x^3}^0 e^{\sin(t)} dt$

Calcular $G'(x) = \dots\dots\dots -e^{\text{sen}(x^3)} \cdot 3x^2 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$G(x) = \int_{x^3}^0 e^{\sin(t)} dt = - \int_0^{x^3} e^{\sin(t)} dt, \text{ y por teorema fundamental del cálculo, } G'(x) = -e^{\text{sen}(x^3)} \cdot 3x^2.$$

6. (2 puntos) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $g(x) = 4$ y $f(x) = \frac{20x}{x^2 + 4}$ se debe resolver:

☐ $\int_0^4 (g(x) - f(x))dx + \int_1^0 (f(x) - g(x))dx$

☐ $\int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \int_1^4 (g(x) - f(x))dx$

☒ $\int_1^4 (f(x) - g(x))dx$

☐ $\int_1^4 (g(x) - f(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $\frac{20x}{x^2 + 4} = 4 \longrightarrow x = 1, x = 4$

en este intervalo $f(x) \geq g(x)$, por lo tanto la respuesta es $\int_{-3}^4 (f(x) - g(x))dx$