**ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana**

**Segundo Parcial 12/06/2023 - Turno 1 - Tema 2**

1. Sea $f(x) = (ax+b)^{\frac{4}{3}}$ con $a > 0$ y $b > 0$. Se sabe que el polinomio de Taylor de orden 1 de $f$ centrado en $x_0 = 4$ es $P(x) = 81 + 16(x-4)$.

   (a) Hallar los valores de $a$ y $b$:

   - ☐ (0,5 punto) $a =$....................4.....................
   - ☐ (0,5 punto) $b =$......................11...................

   (b) (1 punto) Para los valores de $a$ y $b$ encontrados, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f$ centrado en $x_0 = 4$:

   ...............................$P(x) = 81 + 16(x-4) + \dfrac{32}{81}(x-4)^2$..............................

   Resolución:

   $f(4) = (a4+b)^{\frac{4}{3}} = 81 \longrightarrow 4a + b = 27$

   $f'(x) = \dfrac{4}{3}(ax+b)^{\frac{1}{3}}.a \longrightarrow f'(4) = \dfrac{4}{3}(a4+b)^{\frac{1}{3}}.a = 16 \longrightarrow (4a+b)^{\frac{1}{3}}.a = 12$

   de donde $a = 4$ y $b = 11$.

   Con estos valores: $f(x) = (4x+11)^{\frac{4}{3}}$

   $f''(x) = \dfrac{64}{9}(4x+11)^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow f''(4) = \dfrac{64}{9}(27)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{64}{81}$

   El polinomio pedido es: $P(x) = 81 + 16(x-4) + \dfrac{32}{81}(x-4)^2$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n - 1}$ es convergente.

   - ☐ $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$
   - ☐ $x \in (\sqrt{3}; 4)$
   - ■ $x \in \left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$
   - ☐ $x \in \left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$

Resolución:

Por criterio de raíz enésima, $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\mid \frac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n-1}} \mid = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{3^n}}{4^n-1}}. \mid x \mid = \frac{\sqrt{3}}{4} \mid x \mid < 1 \longrightarrow$ $|x| < \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow x \in (-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}})$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x, en ambos casos la serie numérica es divergente (término general no tiende a 0)

3. (1 punto) Hallar $a > 0$ de modo que el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 4x$ para $0 \leq x \leq 1$ sea $\frac{11}{3}$.

   $a =$..................3...........

   Resolución:

$$\int_0^1 a\sqrt{x} - (x^2 - 4x)dx = a\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \quad \longrightarrow a = 3$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

   (a) (1 punto) $\int \frac{\ln^3(5x+1)}{5x+1}dx =$.........................$\frac{1}{20}\ln^4(5x+1) + C$

   Resolución:

   Usando la sustitución $u = \ln(5x+1)$, $\int \frac{\ln^3(5x+1)}{5x+1}dx = \frac{1}{20}\ln^4(5x+1) + C$

   (b) (1 punto) $\int \frac{\sqrt[4]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx =$.........................$4x^{\frac{1}{4}} + \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

   Resolución:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx = \int x^{-\frac{3}{4}}dx + \int x^2.\ln(x)dx = 4x^{\frac{1}{4}} + \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C,$$

   en el segundo término se aplica método de partes con $u = \ln(x)$ $dv = x^2$

5. (1 punto) Sea la función $F(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$.

   Calcular $F'(x) =$.................................$\cos(x^8)4x^3$.

Resolución:

Por teorema fundamental del cálculo: $F'(x) = \cos(x^8).4x^3$.

6. (2 puntos) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$ se debe resolver:

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \int_{-3}^0 (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^1 (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^4 (g(x) - f(x))dx + \int_{-3}^0 (f(x) - g(x))dx$
- ■ $\displaystyle\int_{-3}^4 (g(x) - f(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $x^2 - x = 3x$ si $x \geq 0 \quad x = 0,\ x = 4$

$x^2 - x = -4x$ si $x < 0 \quad x = 0,\ x = -3$

en ambos intervalos $g(x) \geq f(x)$ por lo tanto $\displaystyle\int_{-3}^4 (g(x) - f(x))dx$