ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

Segundo Parcial 12/06/2023 - Turno 1 - Tema 1

1. Sea $f(x) = (ax+b)^{\frac{4}{3}}$ con $a > 0$ y $b > 0$. Se sabe que el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $x_0 = 4$ es $P(x) = 81 + 12(x-4)$.

   (a) Hallar los valores de a y b:

   - ☐ (0,5 punto) $a =$....................3.....................
   - ☐ (0,5 punto) $b =$......................15...................

   (b) (1 punto) Para los valores de a y b encontrados, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $x_0 = 4$:

   ....$P(x) = 81 + 12(x-4) + \frac{2}{9}(x-4)^2$..............................

   Resolución:

   $f(4) = (a4+b)^{\frac{4}{3}} = 81 \longrightarrow 4a + b = 27$

   $f'(x) = \frac{4}{3}(ax+b)^{\frac{1}{3}}.a \longrightarrow f'(4) = \frac{4}{3}(a4+b)^{\frac{1}{3}}.a = 12 \longrightarrow (4a+b)^{\frac{1}{3}}.a = 9$

   de donde $a = 3$ y $b = 15$

   con estos valores: $f(x) = (3x+15)^{\frac{4}{3}}$

   $f''(x) = 4(3x+15)^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow f''(4) = 4(27)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{9}$

   El polinomio pedido es: $P(x) = 81 + 12(x-4) + \dfrac{2}{9}(x-4)^2$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n - 1}$ es convergente.

   - ■ $x \in \left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$
   - ☐ $x \in \left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$
   - ☐ $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4}; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$
   - ☐ $x \in (\sqrt{3}; 4)$

Resolución:

Por criterio de raíz enésima, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\left| \dfrac{x^n.\sqrt{3^n}}{4^n-1} \right|} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{3^n}}{4^n-1}}.\mid x \mid = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \mid x \mid < 1 \longrightarrow$ $|x| < \dfrac{4}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow x \in (-\dfrac{4}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}})$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x, en ambos casos la serie numérica es divergente (término general no tiende a 0)

3. (1 punto) Hallar $a > 0$ de modo que el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 2x$ para $0 \leq x \leq 1$ sea $\dfrac{11}{3}$.

$a =$.....................$\dfrac{9}{2}$.............

Resolución:

$$\int_0^1 a\sqrt{x} - (x^2-2x)dx = a\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \quad \longrightarrow a = \frac{9}{2}$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

   (a) (1 punto) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(4x+1)}{4x+1}dx =$...............$\dfrac{1}{16}\ln^4(4x+1) + C$.........

   Resolución:

   Usando la sustitución $u = \ln(4x+1)$, $\displaystyle\int \frac{\ln^3(4x+1)}{4x+1}dx = \frac{1}{16}\ln^4(4x+1) + C$

   (b) (1 punto) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx =$................$3x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \dfrac{1}{9}x^3 + C$.......

   Resolución:

   $$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^3.\ln(x)}{x}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int x^2.\ln(x)dx = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

   en el segundo término se aplica método de partes con $u = \ln(x)$ $dv = x^2$

5. (1 punto) Sea la función $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,dt$

Calcular $G'(x) =$......................$\cos(x^6).3x^2$.......

Resolución:

Por teorema fundamental del cálculo: $G'(x) = \cos(x^6).3x^2$.

6. (2 puntos) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$ se debe resolver:

- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{4} (g(x) - f(x))dx + \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx$
- ■ $\displaystyle\int_{-3}^{4} (g(x) - f(x))dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx + \int_{-3}^{0} (g(x) - f(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $x^2 - x = 3x$ si $x \geq 0 \quad x = 0,\ x = 4$

$x^2 - x = -4x$ si $x < 0 \quad x = 0,\ x = -3$

en ambos intervalos $g(x) \geq f(x)$ por lo tanto $\displaystyle\int_{-3}^{4} (g(x) - f(x))dx$