

Primer Parcial 02/05/2023 - Turno 3 - Tema 6

1. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\operatorname{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 4x^3} = \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\operatorname{sen}(6x) + 12x^3}{11x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3\operatorname{sen}(6x) \frac{1}{11x^2 + 4x^3} + \frac{12x^3}{x^3(11/x + 4)} = 0 + \frac{12}{4} = 3$$

2. Sea la función $h(x) = g(f(4x + 1)) + 2$. Se sabe que la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $x_0 = 1$ es $y = 2x + 1$ y que la recta tangente al gráfico de la función g en el punto $x_0 = 3$ es $y = 5x + 2$. Se pide:

- (a) 1 (punto) Calcular $h'(0) = \dots\dots\dots 40 \dots\dots\dots$

- (b) (1 punto) Hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto $x_0 = 0$:

$\dots\dots\dots y = 40x + 19 \dots\dots\dots$

Resolución:

De la recta tangente a f , $y = 2x + 1$ sabemos $f'(1) = 2$ y $f(1) = 3$

de la recta tangente a g , $y = 5x + 2$ sabemos $g'(3) = 5$ y $g(3) = 17$

$h'(x) = g'(f(4x + 1)) \cdot f'(4x + 1) \cdot 4$ derivada de la composición

$h'(0) = g'(f(1)) \cdot f'(1) \cdot 4 = g'(3) \cdot 2 \cdot 4 = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ pendiente de la recta tangente pedida

$h(0) = g(f(1)) + 2 = g(3) + 2 = 17 + 2 = 19$ la recta pedida pasa por el punto $(0; 19)$

por lo tanto es $y = 40x + 19$.

3. (1 punto) Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 2}{x - 1}$, entonces la ecuación de la asíntota oblicua es : $\dots\dots\dots y = 4x \dots\dots\dots$

Resolución:

Se debe calcular: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2}{x^2 - x} = 4$ y

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2}{x - 1} - 4x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 2 - 4x^2 + 4x}{x - 1} = 0$$

Por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 4x$.

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-8+4\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(a) (1 punto) El valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual f es continua en $x = 1$ es:.....6.....

(b) (1 punto) Calcular $f'(4) = \dots\dots\dots -\frac{1}{9} \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f(1) = a \text{ y el } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 8 + 4\sqrt{x}}{x - 1} \underset{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 + 2\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 6, \text{ por lo tanto } a = 6.$$

$$f'(x) = \frac{\left(4 + 2\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 1) - (4x - 8 + 4\sqrt{x}) \cdot 1}{(x - 1)^2} \text{ entonces } f'(4) = -\frac{1}{9}$$

5. Sea la función $f(x) = (1 - x) \cdot \sqrt{6x + 1}$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- ☐ f crece en el intervalo $(0; \frac{2}{9})$
- ☐ f vcrece en el intervalo $(-\infty; \frac{2}{9})$
- ☐ f decrece en el intervalo $(-\frac{1}{6}; +\infty)$
- ☒ f decrece en el intervalo $(\frac{2}{9}; +\infty)$

(b) (1 punto)

- ☒ en $x = \frac{2}{9}$ se realiza un máximo
- ☐ en $x = -\frac{1}{6}$ se realiza un máximo
- ☐ en $x = 1$ se realiza un mínimo
- ☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

- ☐ $\left(-\infty; \frac{2}{9}\right]$
- ☒ $\left(-\infty; f\left(\frac{2}{9}\right)\right]$
- ☐ $(0; +\infty)$
- ☐ $\left(f\left(-\frac{1}{6}\right); +\infty\right)$

Resolución: El dominio de la función es $\left[-\frac{1}{6}; +\infty\right)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = -\sqrt{6x+1} + \frac{3(1-x)}{\sqrt{6x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{2}{9}$$

Se estudian los intervalos $\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{2}{9}; +\infty\right)$, se deduce que en $\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{9}\right)$ f crece y $x = \frac{2}{9}$ es un máximo.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se concluye que la imagen de f es $\left(-\infty; f\left(\frac{2}{9}\right)\right]$.