

Primer Parcial 02/05/2023 - Turno 1 - Tema 1

1. Sea $f : [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 9\ln(x)$. Determinar dónde se alcanzan el máximo y mínimo absolutos.

(a) (1 punto) Máximo absoluto en $x = \dots\dots\dots e \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) Mínimo absoluto en $x = \dots\dots\dots \frac{3}{2} \dots\dots\dots$

Resolución:

$$f'(x) = 4x - \frac{9}{x}, \quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \quad (\text{se descarta por no pertenecer al dominio}) \text{ o } x = \frac{3}{2}$$

Se estudian los extremos del intervalo cerrado y el punto crítico, $f(1) = 2$, $f(e) = 5,7$ y $f(3/2) = 0,85$, de donde en $x = \frac{3}{2}$ está el mínimo absoluto y en $x = e$ se realiza el máximo absoluto.

2. (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 8x} - \sqrt{x^2 + 13} = \dots\dots\dots -4 \dots\dots\dots$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 8x} - \sqrt{x^2 + 13} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 8x} - \sqrt{x^2 + 13}) \frac{(\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 + 13})}{(\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 + 13})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x - 13}{(\sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 + 13})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-8 - 13/x)}{x(\sqrt{1 - 8/x} + \sqrt{1 + 13/x})} = -4$$

3. Sea la función $h(x) = 2 + f(7x + e^x)$. Sabiendo que la recta tangente al gráfico de la función f en $x_0 = 1$ es $y = 3x + 1$, hallar:

(a) (1 punto) $h'(0) = \dots\dots\dots 24 \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) la recta tangente al gráfico de h en $x_0 = 0$: $\dots\dots\dots y = 24x + 6 \dots\dots\dots$

Resolución:

De la recta tangente a f , $y = 3x + 1$ sabemos $f'(1) = 3$ y $f(1) = 4$

$h'(x) = f'(7x + e^x) \cdot (7 + e^x)$ derivada de la composición

$h'(0) = f'(1) \cdot (7 + 1) = 3 \cdot 8 = 24$ pendiente de la recta tangente pedida

$h(0) = 2 + f(1) = 2 + 4 = 6$ la recta pedida pasa por el punto $(0; 6)$ por lo tanto es $y = 24x + 6$.

4. (1 punto) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(5x) - 1}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$. El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua es:..... $-\frac{25}{2}$

Resolución:

$$f(0) = k \text{ y el } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - 1}{x^2} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \sin(5x)}{2x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-25 \cos(5x)}{2} = -\frac{25}{2}$$

5. Sea la función $f(x) = \ln(x - 4) + \frac{3}{x - 4} + 2$

(a) (1 punto) sobre intervalos de crecimiento y decrecimiento:

☐ f decrece en el intervalo $(-\infty; 7)$

☐ f crece en el intervalo $(4; 7)$

☐ f decrece en el intervalo $(4; +\infty)$

☒ f crece en el intervalo $(7; +\infty)$

(b) (1 punto)

☐ en $x = 0$ se realiza un mínimo

☒ en $x = 7$ se realiza un mínimo

☐ en $x = 4$ se realiza un máximo

☐ en $x = 9$ se realiza un mínimo

(c) (1 punto) La imagen de la función es:

☐ $(-\infty; 7]$

$$\blacksquare [f(7); +\infty)$$

$$\square [f(4); +\infty)$$

$$\square (4; +\infty)$$

Resolución: El dominio de la función es $(4; +\infty)$

Calculamos su derivada para estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{3}{(x-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 7$. Se estudian los intervalos $(4; 7)$ y $(7; +\infty)$, se deduce que en $(7; +\infty)$ f crece y $x = 7$ es un mínimo.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se concluye que la imagen de f es $[f(7); +\infty)$.