

Recuperatorio Segundo Parcial 17/06/2025 - Tema 9

1. Sea f una función que satisface $f'(x) = 2x^2 + e^{f(x)}$ y $f(1) = 0$.

(a) (1 punto) Calcular $f''(x) = \dots\dots\dots 4x + e^{f(x)} f'(x) \dots\dots\dots$

(b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de f de orden 3 centrado en $x_0 = 1$:

$$\dots\dots\dots P(x) = 3(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + \frac{20}{3!}(x-1)^3 \dots\dots\dots$$

Resolución:

$f''(x) = 4x + e^{f(x)} f'(x)$ se debe usar regla de la cadena

Para el polinomio pedido:

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 2 + e^{f(1)} = 2 + 1 = 3$$

$$f''(1) = 4 + e^0 \cdot 3 = 7$$

$$f'''(x) = 4 + e^{f(x)} \cdot (f'(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x)$$

$$f'''(1) = 4 + e^{f(1)} \cdot (f'(1))^2 + e^{f(1)} \cdot f''(1) = 4 + 9 + 7 = 20$$

$$\text{el polinomio pedido es: } P(x) = 3(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + \frac{20}{3!}(x-1)^3$$

2. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+1}{4n+5} \cdot \frac{(x-4)^n}{7^n}$ es convergente.

☒ $x \in (-3; 11)$

☐ $x \in (4; 7)$

☐ $x \in [-3; 11]$

☐ $x \in [4; 7]$

Resolución:

Por criterio de raíz enésima: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{7n+1}{4n+5} \cdot \frac{(x-4)^n}{7^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7n+1}{4n+5}} \cdot \sqrt[n]{\frac{|x-4|^n}{7^n}} =$
 $\frac{|x-4|}{7} < 1 \rightarrow -3 < x < 11$

Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x , en ambos casos la serie numérica es divergente (término general no tiende a 0)

3. (1 punto) Hallar $a \in \mathbb{R}_{>0}$ para que el área encerrada entre el eje x , el gráfico de la función

$$f(x) = \frac{3a}{\sqrt{x^3}} \text{ y las rectas } x = 1 \text{ y } x = 4 \text{ sea igual a } 21.$$

$$a = \dots\dots\dots 7 \dots\dots\dots$$

Resolución:

$$\int_1^4 \frac{3a}{\sqrt{x^3}} dx = 3ax^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) \Big|_1^4 = 3a = 21 \rightarrow a = 7$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

$$(a) \text{ (1 punto) } \int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} dx = \dots\dots\dots \ln^2(\sqrt{x}) + C = \frac{\ln^2(x)}{4} + C$$

Resolución: usando la sustitución $u = \ln(\sqrt{x})$

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} dx = \ln^2(\sqrt{x}) + C = \left(\frac{\ln(x)}{2} \right)^2 + C = \frac{\ln^2(x)}{4} + C$$

$$(b) \text{ (1 punto) } \int \frac{x-5}{x^2+2x-3} dx = \dots\dots\dots -\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C$$

Resolución:

Se usa el método de fracciones simples,

$$\int \frac{x-5}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{x-5}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{x-5}{(x-1) \cdot (x+3)} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C$$

5. Hallar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que: $\int_0^1 x^7 e^{-x} dx = a + b \int_0^1 x^6 e^{-x} dx$

$$(a) \text{ (1 punto) } a = \dots\dots\dots -e^{-1} \dots\dots\dots$$

(b) (1 punto) $b = \dots\dots\dots 7 \dots\dots\dots$

Resolución:

Por integración por partes con $u = x^7$ $du = 7x^6$, $dv = e^{-x}$ $v = -e^{-x}$

$$\int_0^1 x^7 e^{-x} dx = -x^7 e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 7x^6 (-e^{-x}) = -e^{-1} + 7 \int_0^1 x^6 e^{-x} dx$$

de donde $a = -e^{-1}$ y $b = 7$

6. (1 punto) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+4}}$ y el eje y se debe resolver:

☐ $\int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$

☒ $\int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$

☐ $\int_{-4}^3 (g(x) - f(x)) dx$

☐ $\int_{-4}^3 (f(x) - g(x)) dx$

Resolución:

Límites de integración: $\frac{7}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4} \longrightarrow x = 3$

en el intervalo $[0; 3]$ $g(x) \geq f(x)$. La respuesta es $\int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$