ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) - Cátedra Cabana

Recuperatorio Segundo Parcial 17/06/2025 - Tema 10

1. (2 puntos) Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+1}{4n+5} . \frac{(x-4)^n}{7^n}$ es convergente.

   - ☐ $x \in [-3; 11]$
   - ☐ $x \in [4; 7]$
   - ■ $x \in (-3; 11)$
   - ☐ $x \in (4; 7)$

   Resolución:

   Por criterio de raíz enésima: $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\mid \frac{7n+1}{4n+5} . \frac{(x-4)^n}{7^n}} \mid = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7n+1}{4n+5}} . \sqrt[n]{\frac{\mid x-4 \mid^n}{7^n}} = \frac{|x-4|}{7} < 1 \longrightarrow -3 < x < 11$

   Para analizar los extremos del intervalo se reemplaza en la serie los valores de x, en ambos casos la serie numérica es divergente (término general no tiende a 0)

2. Sea f una función que satisface $f'(x) = 2x^2 + e^{f(x)}$ y $f(1) = 0$.

   (a) (1 punto) Calcular $f''(x) =$ ....$4x + e^{f(x)} f'(x)$...................................

   (b) (1 punto) Hallar el polinomio de Taylor de f de orden 3 centrado en $x_0 = 1$:

   ....$P(x) = 3(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + \frac{20}{3!}(x-1)^3$................................

   Resolución:

   $f''(x) = 4x + e^{f(x)} f'(x)$ se debe usar regla de la cadena

   Para el polinomio pedido:

   $f(1) = 0$

   $f'(1) = 2 + e^{f(1)} = 2 + 1 = 3$

   $f''(1) = 4 + e^0.3 = 7$

   $f'''(x) = 4 + e^{f(x)}.(f'(x))^2 + e^{f(x)}.f''(x)$

$f'''(1) = 4 + e^{f(1)}.(f'(1))^2 + e^{f(1)}.f''(1) = 4 + 9 + 7 = 20$

el polinomio pedido es: $P(x) = 3(x-1) + \frac{7}{2}(x-1)^2 + \frac{20}{3!}(x-1)^3$

3. (1 punto) Hallar $a \in \mathbb{R}_{>0}$ para que el área encerrada entre el eje x, el gráfico de la función $f(x) = \frac{3a}{\sqrt{x^3}}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ sea igual a 21.

   $a =$..................7...................................

   Resolución:

$$\int_1^4 \frac{3a}{\sqrt{x^3}}dx = 3ax^{-\frac{1}{2}}.(-2)\Big|_1^4 = 3a = 21 \quad \to a = 7$$

4. Calcular las siguientes primitivas:

   (a) (1 punto) $\int \frac{x-5}{x^2+2x-3}dx =$.........................$-\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C$

   Resolución:

   Se usa el método de fracciones simples,
   $\int \frac{x-5}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{x-5}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{x-5}{(x-1).(x+3)}dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+3}\right)dx =$
   $-\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + C$

   (b) (1 punto) $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}dx =$.........................$\ln^2(\sqrt{x}) + C = \frac{\ln^2(x)}{4} + C$

   Resolución: usando la sustitución $u = \ln(\sqrt{x})$

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}dx = \ln^2(\sqrt{x}) + C = \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^2 + C = \frac{\ln^2(x)}{4} + C$$

5. Hallar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que: $\int_0^1 x^7 e^{-x}dx = a + b\int_0^1 x^6 e^{-x}dx$

   (a) (1 punto) $b =$.............7...........

(b) (1 punto) $a =$...............$-e^{-1}$.............

Resolución:

Por integración por partes con $u = x^7 \quad du = 7x^6, \quad dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$$\int_0^1 x^7 e^{-x} dx = -x^7 e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 7x^6(-e^{-x}) = -e^{-1} + 7\int_0^1 x^6 e^{-x} dx$$

de donde $a = -e^{-1}$ y $b = 7$

6. (1 punto) Para calcular el área encerrada por los gráficos de las funciones $g(x) = \sqrt{x+4}$, $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x+4}}$ y el eje y se debe resolver:

- ■ $\displaystyle\int_0^3 (f(x) - g(x))dx$
- □ $\displaystyle\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$
- □ $\displaystyle\int_{-4}^3 (g(x) - f(x))dx$
- □ $\displaystyle\int_{-4}^3 (f(x) - g(x))dx$

Resolución:

Límites de integración: $\dfrac{7}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4} \longrightarrow \quad x = 3$

en el intervalo $[0;3] \quad f(x) \geq g(x)$. La respuesta es $\displaystyle\int_0^3 (f(x) - g(x))dx$