Análisis Matemático A

(Para Ingenieria y Ciencias Exactas y Naturales)

SERIES

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Adriana Cabana

Paula Remesar

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales, ¿podremos sumar los infinitos términos de la sucesión? ¿Cómo podemos pensar el sumar infinitos números? Sabemos sumar dos números y al resultado sumar el siguiente, etc. pero si esa suma no tiene fin?, ¿podremos obtener un resultado o conclusión?

Para esto vamos a definir una nueva sucesión.

Definición

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales, la sucesión definida por

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{a}_1$$

$$\mathrm{S}_2 = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2$$

$$\dots$$

$$\mathrm{S}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}$$

$$\dots$$

se llama **sucesión de sumas parciales**

O sea, $\{\mathrm{S}_n\}_{n\geq 1}$ es una nueva sucesión que definimos como

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo $\sum$ se lee sumatoria, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ significa que hay que sumar todos los a_k con k desde 1 hasta n.

Observación

$$\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + a_{n+1}$$

Ejercicio 1

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión dada por $a_n = n$
Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de sumas parciales.

Resolución:

$$\mathrm{S}_1 = a_1 = 1$$

$$\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$$

$$\mathrm{S}_4 = \mathrm{S}_3 + a_4 = 6 + 4 = 10$$

$$\mathrm{S}_5 = \mathrm{S}_4 + a_5 = 10 + 5 = 15$$

Ejercicio 2

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión dada por $a_n = \dfrac{1}{3^n}$
Calcular los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales.

Resolución:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\
S_3 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9} \\
S_4 &= \frac{13}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27}
\end{aligned}$$

Nos interesa decidir si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$ tiene, o no, límite finito. Es claro que la sucesión del ejercicio 1 no tiene un límite finito. Más adelante veremos que ocurre con la sucesión del ejercicio 2.

Definición

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. Llamamos **serie** de término general $\{a_n\}$ al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales.
A este límite lo escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Si este límite es finito decimos que la serie es **convergente**, en caso contrario decimos que es **divergente**.

Proposición

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración:
Como la serie converge $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$, además $S_n = S_{n-1} + a_n$ así que $\mathrm{a_n} = \mathrm{S_n} - \mathrm{S_{n-1}}$.

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$ $\square$

Esta es una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de una serie. Luego veremos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no es convergente a pesar de cumplir la condición $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a_n = 0$.

La proposición sirve, por ejemplo, para decidir que una sucesión no es convergente.

Ejercicio 3

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$ es divergente.

Resolución:
$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+3} = 1 \neq 0$ por lo tanto la serie no puede ser convergente.

Propiedades de linealidad

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y $k \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ es convergente y
$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

La demostración de ambas propiedades se basa en las propiedades de límites.

Veamos algunos casos particulares.

Ejemplo 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

El término general de la serie se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... = 1 - \frac{1}{n+1}$ (se van cancelando todas las fracciones, sólo queda la última)

Entonces $\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{n\to\infty} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, así la serie es convergente y conocemos su resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Este es un ejemplo de las llamadas *series telescópicas.*

Ejemplo 2

Si $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$

Estudiaremos su comportamiento según el valor de r.

- $|r| \geq 1$

  En este caso el término general $a_n = r^n$ no tiende a cero cuando n tiende a infinito así que podemos afirmar que la serie no es convergente.

- $|r| < 1$

  Observemos que la serie comienza en 0 con lo cual vamos a considerar

  $$\mathrm{S}_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1},$$

  multiplicamos por r

  $$r\mathrm{S}_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,$$

  restamos miembro a miembro

  $$\mathrm{S}_n - r\mathrm{S}_n = 1 - r^n,$$

  sacamos factor común S_n

  $$\mathrm{S}_n(1 - r) = 1 - r^n,$$

  y como $|r| < 1$ sabemos que $1 - r \neq 0$ así que podemos dividir por $1 - r$ y obtenemos

  $$\mathrm{S}_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

  Para analizar la serie tomamos límite, $\lim_{n \to \infty} \mathrm{S}_n = \frac{1}{1 - r}$.

  En conclusión, si $|r| < 1$, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}}$.

Definición

La serie del ejemplo anterior se llama **serie geométrica de razón** r.

Ejercicio 4

Decidir si las siguientes series geométricas son convergentes. En caso afirmativo, calcular su suma

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^{n+1}}{8^n}$

Resolución:

1. Podemos usar que $\dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, entonces la serie es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$, que cumple la condición $|r| < 1$, así que la serie converge. Usamos la fórmula del ejemplo anterior y obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

   Notar que esta sucesión es la del ejercicio 2 y acabamos de probar que converge.

2. Esta serie también es una serie geométrica de razón $r = 4$, para este valor de r la serie no converge.

3. En este caso $r = \frac{1}{2}$ cumple la condición $|r| < 1$ pero tenemos que hacer una «corrección» porque la serie no comienza en $n = 0$ sino que empieza en $n = 2$. Lo que hacemos es sumar y restar los términos de a_0 y a_1 para poder aplicar la fórmula de la suma vista en el ejemplo 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 + \frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{1}{2} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2} = \frac{1}{1-1/2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{1/2} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4. Vamos primero a trabajar el término general para después usar propiedades de linealidad,

$$\frac{3^n + 5^{n+1}}{8^n} = \frac{3^n}{8^n} + \frac{5^{n+1}}{8^n} = \left(\frac{3}{8}\right)^n + 5\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

   entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^{n+1}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + 5\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = \frac{1}{1-3/8} + 5\,\frac{1}{1-5/8} = \frac{8}{5} + 5\frac{8}{3} = \boxed{\frac{224}{15}}$$

Usamos que ambas series son convergentes pues las razones son $r = \frac{3}{8}$ y $r = \frac{5}{8}$ respectivamente y ambas cumplen que $|r| < 1$.

En los ejemplos y ejercicios anteriores trabajamos con series a las que les podíamos calcular su suma, esto no podemos hacerlo siempre. Con algunas series solo vamos a poder decidir si convergen o no. Para esto vamos a usar algunos criterios. Antes de comenzar es muy conveniente tener el siguiente resultado.

Propiedad

Sea $p \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Esta serie se llama **serie p**. Cuando $p = 1$ es conocida como **serie armónica**.

La demostración de esta propiedad puede leerse en cualquier libro de cálculo en una variable.

Ejercicio 5

Decidir si las siguientes series son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt[5]{n^7}}$

Resolución:

1. Como $\sqrt[3]{n^2} = n^{2/3}$ el término general de la serie puede escribirse como $\frac{1}{n^{2/3}}$ que es una serie p, con $p = \frac{2}{3} < 1$ así que podemos afirmar que la serie diverge.
2. En este caso usamos linealidad y reescribimos el denominador
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt[5]{n^7}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/5}}$$
nos quedó una serie p con $p = \frac{7}{5} > 1$ entonces la serie converge.

Criterios de convergencia de Series de Términos Positivos

Los siguientes criterios son muy útiles para decidir la convergencia de series de términos positivos.

Criterios de comparación

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones tales que a partir de un cierto n se cumple que $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

Ejercicio 6

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ es convergente.

Resolución:
Vamos a comparar esta serie con la geométrica de razon $r = \frac{1}{2}$.

Si $n \geq 1$ se cumple lo siguiente:

$$0 \leq 2^n \leq n + 2^n \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, usando el primer caso del criterio de comparación podemos afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ también converge.

Ejercicio 7

Probar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ es divergente.

Resolución:
$\forall n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Criterio de comparación con paso al límite

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de términos positivos ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$) tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = s \geq 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejercicio 8

Probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{9^n + 3^n}$ es convergente.

Resolución:

Consideramos $b_n = \dfrac{2^n}{9^n} = \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ sabemos que $\sum b_n$ es convergente (es geométrica de razón $r = \frac{2}{9}$)

Calculamos el límite del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{9^n+3^n}}{\frac{2^n}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{9^n + 3^n} = 1 > 0$$

por lo tanto el criterio anterior nos permite asegurar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{9^n + 3^n}$ converge.

Series Alternadas

Definición

Se llama **serie alternada** a una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

donde $a_n \geq 0$.

Criterio de Leibniz

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de términos positivos, decreciente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Ejercicio 9

Probar que las siguientes series son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+2}$

Resolución:

1. Apliquemos el criterio de Leibniz, $a_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión de términos positivos y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$
   Falta ver que la sucesión es decreciente, pero esto es sencillo,
   $$n \leq n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$
2. Este ejercicio es un poco más complicado que el anterior, vamos a usar también el criterio de Leibniz.
   $a_n = \dfrac{n}{n^3+2}$ es una sucesión de términos positivos que cumple $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$
   Para ver que la sucesión es decreciente, vamos a utilizar y analizar la función $f(x) = \dfrac{x}{x^3+2}$
   $$f'(x) = \frac{x^3+2-3x^3}{(x^3+2)^2} = \frac{-2x^3+2}{(x^3+2)^2} < 0 \quad \text{para todo} \quad x > 1$$
   Como la derivada es negativa, la función es decreciente para todo $x > 1$ entonces la sucesión es decreciente.

Definición

- Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** si la serie (de valores absolutos) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge condicionalmente** si es convergente pero la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

Ejemplo

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente pero no absolutamente.

En el ejercicio 9 vimos que esta serie converge, pero al aplicar módulo al término general, obtenemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica) que diverge.

Teorema

Si una serie converge absolutamente entonces converge, o sea si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración:
Usaremos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$$

(recordar que $|a_n| = a_n$ o $-a_n$ según su signo)

Por la hipótesis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge y usando el criterio de comparación obtenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + a_n$ también converge.

Ahora bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + a_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

así que podemos afirmar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente por ser resta de dos series convergentes.

Ejemplo

Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

Veamos si converge absolutamente, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

la última serie converge pues $p = 2 > 1$ usamos comparación y obtenemos que la serie converge absolutamente entonces, por el teorema anterior $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$ converge.

Los siguientes criterios también son de gran utilidad para decidir la convergencia de algunas series.

Criterio de D'Alembert o del cociente

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

a) Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o $L = +\infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Si $L = 1$ el criterio no decide la convergencia de la serie.

Ejercicio 9

Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$$

Resolución:

Usemos el criterio de D'Alembert,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{(n+1)!}}{\frac{3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

entonces la serie converge.

Criterio de Cauchy o de la raíz

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

a) Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $L > 1$ o $L = +\infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) Si $L = 1$ el criterio no decide la convergencia de la serie.

Ejercicio 10

Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$$

Resolución:

En este ejercicio nos conviene usar el criterio de la raíz n-ésima ya que tenemos una expresión elevada a la n.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1,$$

entonces la serie converge.

Series de Potencias

Sabemos que si una funcion es n-veces derivable, podemos aproximarla por su polinomio de Taylor de orden n:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + r_n(x) \qquad \text{con } r_n \text{ el resto.}$$

¿Qué sucede si la funcion es derivable para todo n? En este caso, podemos aproximar a f por polinomios de cualquier orden y suponer que se verifica la igualdad

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Pero a la derecha tenemos una «suma infinita» cuyo sentido hay que precisar, dada la presencia de la variable x, no es exactamente una serie numerica, pero la transformamos en una cada vez que consideramos un valor fijo para x. De esta manera, es posible que la serie converja para algunos valores de la variable y para otros no. Para formalizar estas ideas, introducimos las series de pontencias.

Definición

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

donde c es un número fijo.

Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}x^n$$

converge si $|x| < 2$ y diverge si $|x| \geq 2$.

Observemos que para cada x fijo la serie puede escribirse como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ que corresponde a una serie geométrica de razón $r = \frac{x}{2}$. Por lo tanto, converge si $|\frac{x}{2}| < 1$ y diverge si $|\frac{x}{2}| \geq 1$ (despejando estas desigualdades se llega a las condiciones del enunciado)

Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-1)^n$$

converge sólo si $x = 1$.

Es claro que si $x = 1$ el término general es nulo y por ende la serie vale cero.

Si $x \neq 1$ usamos el Criterio de Cauchy,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|n^n (x-1)^n|} = \lim_{n \to \infty} n|x-1| = +\infty$$

y entonces la serie diverge.

Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+3)^n$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

En este ejemplo usamos el Criterio de D'Alambert,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\frac{1}{(n+1)!}(x+3)^{n+1}|}{|\frac{1}{n!}(x+3)^n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!|x+3|^{n+1}}{(n+1)!|x+3|^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x+3|}{n+1} = 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie converge cualquiera sea el valor de x.

En estos tres ejemplos vimos que la series convegen en un intervalo, en un punto o en todo $\mathbb{R}$. El siguiente teorema afirma que estos son los únicos casos posibles.

Teorema

Dada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ puede ocurrir:

1. La serie converge sólo si $x = c$.
2. La serie converge para todo valor de x.
3. Existe $R > 0$ tal que la serie converge si $|x-c| < R$ y la serie diverge si $|x-c| > R$.

Definición

El número R del teorema anterior se llama **radio de convergencia** de la serie.

Si la serie converge sólo si $x = c$ decimos que el radio de convergencia es $R = 0$. En cambio, si converge en todo $\mathbb{R}$ decmos que $R = \infty$.

Observemos que el tercer punto del teorema no nos indica que ocurre cuando $x - c = \pm R$. A estos casos hay que estudiarlos en forma particular, de este modo la serie va a ser convergente si

x pertenece a alguno de los siguiente intervalos: $(R-c, R+c)$, $[R-c, R+c)$, $(R-c, R+c]$ o $[R-c, R+c]$. El intervalo que corresponda se llama **intervalo de convergencia**

Ejercicio 11

Determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

Resolución:
Estudiamos la convergencia usando el criterio de Cauchy,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{n2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n}\ 2} = \frac{|x+1|}{2}$$

El criterio nos asegura que si $\frac{|x+1|}{2} < 1$ la serie converge, y si $\frac{|x+1|}{2} > 1$ la serie diverge.
Lo que falta ver es qué sucede en los bordes del intervalo, o sea en valores de x tales que el criterio de la raíz no concluye.

$$\frac{|x+1|}{2} = 1 \iff |x+1| = 2 \iff x = 1 \text{ o } x = -3.$$

Veamos en $x = 1$: reemplazándolo en la serie, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ obtenemos la serie armónica que ya sabemos que es divergente.

En $x = -3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nos quedó la serie alternada del ejercicio 9 que es convergente.

En conclusión, esta serie converge para los valores de $x \in [-3; 1)$, este es el intervalo de convergencia de la serie. El radio de convergencia es 2.

Bibliografía:

- Noriega, R. (1987) *Cálculo diferencial e integral* (3° ed.) Buenos Aires. Editorial Docencia.
- Stewart, J. (2012) *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7° ed.) México. Cengage Learning