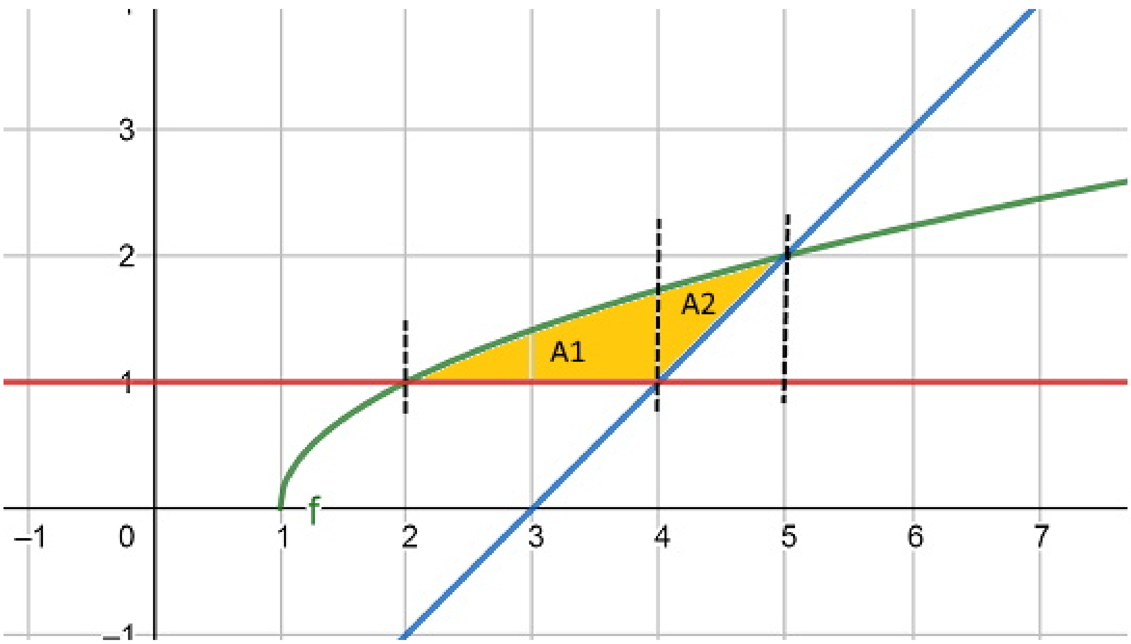
Análisis Matemático A

(Para Ingenieria y Ciencias Exactas y Naturales)

Integrales



$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Integral Indefinida

Si f es una función con dominio $\mathcal{D}$, la función F, definida en el mismo dominio es una primitiva de f sí y sólo sí F es derivable en $\mathcal{D}$ y su derivada es f. Es decir,

$$\text{F es primitiva de f en } \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}\ F'(x) = f(x)$$

Observación:

Si f tiene una primitiva, entonces tiene infinitas.

Ejemplo:

Tomamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus f(x) = 4x^3$ Vemos que esa f es, justamente, la derivada de x^4. Por lo tanto, $F(x) = x^4$ es una primitiva de f (porque $F'(x) = f(x)$). Además es fácil ver que cualquier F del tipo

$$F(x) = x^4 + C \quad \text{donde C es cualquier constante}$$

tiene como derivada a $f(x)$. Como se ve, hay infinitas primitivas, una para cada valor posible de C.

Notación:

Se conoce como notación de Leibniz el uso del símbolo

$$\int f(x)dx$$

para designar una primitiva general de f. Es decir, que abarca todas las posibles primitivas de f. Estas primitivas se diferencian entre sí por una constante aditiva C, de modo que

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ejemplo:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

ya que

$$(\sin x)' = \cos x$$

En la sección que sigue se explicarán distintos métodos de integración. Esto es, distintos métodos para obtener primitivas de una función. Pero antes veremos una propiedad que a menudo vamos a usar. Si f y g son integrables y α y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

ésta es la propiedad de linealidad de la integral.

Métodos de integración

Integración inmediata

Si sabemos que $F'(x) = f(x)$ y nos piden obtener las primitivas de $f(x)$ la solución es $F(x) + C$.

Ejemplo1:

Sabemos que $(x^n)' = nx^{n-1}$, por lo tanto

$$\int nx^{n-1}dx = x^n + c$$

y usando la propiedad de linealidad

$$\int x^{n-1}dx = \frac{1}{n}x^n + C \quad \text{si } \ n \neq 0$$

Ejemplo 2:

$$\int \left[2x^3 + \frac{1}{x^3}\right] dx$$

Usando el ejemplo anterior y la propiedad de linealidad:

$$\begin{aligned} \int \left[2x^3 + x^{-3}\right] dx &= 2\int x^3 dx + \int x^{-3}dx \\ &= 2\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{(-2)}x^{-2} + C \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^{-2} + C \end{aligned}$$

En general, es fácil ver si la integración es correcta ya que al derivar el resultado debería obtenerse el integrando.

Ejemplo 3:

$$\int \left[3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right] dx$$

Usando el ejemplo 1 y que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} \int \left[3x^{-2} + x^{-1}\right] dx &= 3\int x^{-2}dx + \int x^{-1}dx \\ &= 3\frac{1}{(-1)}x^{-1} + \ln|x| + C \\ &= -3x^{-1} + \ln|x| + C \end{aligned}$$

A continuación presentamos una lista Fig(1). con las integrales inmediatas; en todos los casos debe sumarse una constante aditiva.

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^x = e^x$$

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

$$\int \operatorname{sen}(x) = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int \sec^2(x) = \tan(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$$

Figure 1: Tabla de integrales inmediatas

Es preciso notar en este punto que la integración es un proceso más complejo y menos inmediato que la derivación, esto se hace evidente en cuanto querramos encontrar la primitiva de alguna función que no esté en la tabla. A continuación describiremos algunos métodos que nos permitirán pasar de integrales que no estén en la tabla a otras que sí lo están, para poder encontrar sus primitivas.

Integración por sustitución

Este método se basa en usar la regla de la cadena para la derivada de la composición de funciones. Esto es:

$$\text{Si } \ Q(x) = F(g(x)) \Rightarrow Q'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

De modo que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \text{con} \quad F'(x) = f(x)$$

Haciendo el cambio de variables (o la sustitución) $z = g(x)$ y reemplazando esto en la ecuación de arriba, se obtiene

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C = \int F'(z)dz$$

O bien, si se escribe $F'(x) = f(x)$, se obtiene

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(z)dz$$

Estamos en condiciones entonces de formalizar este resultado.

Método de sustitución:
Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo dominio es $\mathcal{D}$ y f es continua sobre $\mathcal{D}$, entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(z)dz$$

A continuación veremos algunos ejemplos.
Ejemplo 1:

$$\int (3x-5)^4 dx$$

Llamamos $z = 3x - 5$, así $dz = 3dx$. Antes de hacer el cambio de variables notemos que

$$\int (3x-5)^4 dx = \int (3x-5)^4 \frac{3}{3} dx$$

ahora sí se ve claramente cómo podemos escribir z en lugar de $3x - 5$ y dz en lugar de $3dx$

$$\int (3x-5)^4 \frac{3}{3} dx = \int (z)^4 \frac{1}{3} dz$$

esta integral tiene una primitiva inmediata

$$\int (z)^4 \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} \int (z)^4 dz = \frac{1}{3} \frac{(z)^5}{5} + C$$

Volviendo a la variable original

$$\int (3x-5)^4 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-5)^5}{5} + C$$

Ejemplo 2:

$$\int 2x \cos(x^2) dx$$

Llamamos $z = x^2$, así, $dz = 2xdx$, entonces

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos(z) dz$$

Esta última integral tiene una primitiva inmediata

$$\int \cos(z) dz = \sin(z) + C$$

Volviendo a la variable original

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$

Ejemplo 3:

$$\int \sin^3(x) \cos(x) dx$$

Llamamos $z = \sin(x)$, así $dz = \cos(x)dx$, entonces

$$\int \sin^3(x) \cos(x) dx = \int z^3 dz$$

Esta última integral tiene una primitiva inmediata

$$\int z^3 dz = \frac{1}{4} z^4 + C$$

Volviendo a la variable original

$$\int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{1}{4} \sin^4(x) + C$$

Ejemplo 4:

$$\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx$$

Llamamos $z = 3x^4 + 5x - 3$, así $dz = (12x^3 + 5)dx$, entonces

$$\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx = \int \frac{1}{z}dz$$

Esta última integral tiene una primitiva inmediata

$$\int \frac{1}{z}dz = \ln|z| + C$$

Volviendo a la variable original

$$\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx = \ln|3x^4+5x-3| + C$$

Ejemplo 5:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$$

Llamamos $z = \ln(x)$, así $dz = \frac{1}{x}dx$, entonces

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx = \int \cos(z)dz$$

Esta última integral tiene una primitiva inmediata

$$\int \cos(z)dz = \sin(z) + C$$

Volviendo a la variable original

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx = \sin(ln(z)) + C$$

Integración por partes

Otro método, ampliamente utilizado para el tratamiento del problema de integración, se basa en la regla de derivación del producto. Ésta establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Integrando ambos miembros se obtiene

$$\int \left[f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right] dx = f(x)g(x)$$

O bien,

$$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)$$

Podemos reacomodar esta ecuación como

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

La condición es, entonces, que uno de los dos factores tenga primitiva; el otro factor sólo deberá derivarse. Ahí radica la ventaja de este método. Es usual cambiar la notación para simplificar la ecuación anterior; para hacer esto definimos $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, los diferenciales son $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, así la expresión anterior se expresa como sigue:

Método de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 1:

$$\int x\sin(x)dx$$

Elegimos

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ v' = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Ejemplo 2:

$$\int \ln(x)dx$$

Aunque en este caso el integrando no parezca un producto de funciones, podemos verlo así si lo escribimos como

$$\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$$

Elegimos

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 1 \quad \Rightarrow \quad v = x$$

Así

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx$$

Entonces

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C$$

Ejemplo 3:

$$\int e^x \sin(x)dx$$

Elegimos

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad v = -\cos(x)$$

Así

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))dx = -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)dx \qquad (1)$$

Para calcular $\int e^x \cos(x)dx$, elegimos

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad v = \sin(x)$$

Así

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

Reemplazando en (1) se obtiene

$$\int e^x \sin(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

Con lo cual

$$2\int e^x \sin(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x)$$

Entonces

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$$

Fracciones Simples

En esta sección mostraremos cómo integrar cualquier función racional (un cociente de polinomios), al expresarla como una suma de fracciones que tienen una primitiva inmediata. El integrando entonces será del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, con f y g polinomios. Si el grado de f es mayor que el grado de g, se debe efectuar la división de los polinomios:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

donde $q(x)$ (el cociente entre f y g) es un polinomio, de modo que su integral es inmediata y $r(x)$ es el resto de la división, de manera que su grado es menor que el de $g(x)$.
Ejemplo:

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int [(x-1) + \frac{1}{x+1}]dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C$$

El término $\frac{r(x)}{g(x)}$ no necesariamente tiene una primitiva inmediata. Existen varias posibilidades, que enumeramos a continuación:

- Si $g(x)$ tiene raíces reales y simples se puede escribir como:

  $$g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

  donde a es el coeficiente principal y $x_1, x_2...x_n$ son las raíces de $g(x)$. Podemos escribir entonces
  $$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$$
  Para obtener $A_1, A_2, ...A_n$ se simplifican los denominadores y se evalúan ambos miembros en las raíces de $g(x)$, de manera de obtener las A_i.

  Ejemplo:
  $$\int \frac{x+1}{x^2-2x}dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)}dx =$$
  Entonces
  $$\frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2}$$
  Efectuando la suma en el término de la derecha y simplificando los denominadores:

  $$x+1 = A_1(x-2) + A_(2x)$$

  Evaluando en las raíces:

  $$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A_1(-2) \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}$$
  $$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2+1 = A_2(2) \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2}$$

Así:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x}dx = \int \left[\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x-2}\right] dx = -\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2}\ln(x-2) + C$$

Es decir; en estos casos, halladas las A_i, se integra cada término por separado, resultando de ello una suma de logaritmos.

- Si $g(x)$ tiene raíces reales pero algunas de ellas múltiples (dos o más raíces iguales), se puede escribir como:

$$g(x) = a(x-x_1)^m(x-x_2)...(x-x_n)$$

En este caso x_1 es raíz de g con multiplicidad m y la descomposición en raíces simples debe hacerse de la siguiente forma:

$$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_m}{(x-x_1)^m} + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

Para obtener los A_i en este caso se hace como en el anterior, pero no alcanza con evaluar en las raíces, hay que evaluar también en algunos otros valores de x hasta tener tantas ecuaciones como ingógnitas.

Ejemplo:

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)}dx$$

en este caso $x=1$ es una raíz de grado dos de g. De modo que la suma nos queda:

$$\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-2)}$$

Nuevamente, simplificamos los denominadores para obtener:

$$x^2-x+4 = A_1(x-2)(x-1) + A_2(x-2) + A_3(x-1)^2$$

Resta darle valores a x hasta poder resolver el sistema:

$$\begin{aligned}
x=1 \quad &\Rightarrow \quad 4 = A_2(-1) \Rightarrow A_2 = -4 \\
x=2 \quad &\Rightarrow \quad 6 = A_3(1) \Rightarrow A_3 = 6 \\
x=0 \quad &\Rightarrow \quad 4 = A_1(-1)(-2) + A_2(-2) + A_3(1) \Rightarrow A_1 = -5
\end{aligned}$$

Así:

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)}dx = \int \left[\frac{-5}{(x-1)} + \frac{-4}{(x-1)^2} + \frac{6}{(x-2)}\right] dx = \frac{4}{x-1} - 5\ln(x-1) + 6\ln(x-2) + C$$

Existen, además, otras posibilidades concernientes a las raíces complejas de $g(x)$, pero no se estudiarán en este curso.

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre ya que establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El cálculo diferencial surge a partir del problema de la recta tangente, mientras que el cálculo integral nace a partir del problema del área. Estos dos problemas, aparentemente no relacionados resultan ser procesos inversos.

Sea f una función cuya integral entre a y x existe para todo a y para todo x perteneciente al intervalo $[c, d]$ y sea $A(x)$ su integral entre a y x, entonces, la derivada de $A(x)$ en cualquier $x \in (c, d)$ donde f sea continua será igual a $f(x)$ Es decir,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Si existe dicha función $F(x)$, será continua para todo x perteneciente al intervalo $[c, d]$.

Usando la notación de Leibniz para derivadas, podemos expresar el TFC como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, esta ecuación establece que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f.

Ejemplo 1:

Queremos encontrar la derivada de la función

$$g(x) = \int_o^x \sqrt{1+t^2}dt$$

Como $f(t)$ es continua en su dominio natural, entonces podemos usar el TFC:

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Ejemplo 2: Encontrar

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^4} \cos(t)dt$$

En este caso debemos ser cuidadosos al usar la regla de la cadena junto con el TFC.

Para eso llamamos $u = x^4$, de esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \cos(t)dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \cos(t)dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \cos(t)dt\right]\frac{du}{dx} \\ &= \cos(u)\frac{du}{dx} \\ &= \cos(x^4)\cdot 4x^3 \end{aligned}$$

Integrales Definidas

A partir del teorema fundamental del cálculo podemos deducir las siguientes propiedades. ***Propiedades***. Si F es una primitiva de f, entonces:

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

4. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{con } c \in [a; b]$$

La regla de Barrow, conocida también como el segundo teorema fundamental del cálculo dice que si f es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$. Para ver esto, comencemos por notar que el TFC

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

También podría haberse escrito como

$$F(x) + C = \int_a^x f(t)dt$$

ya que la derivada de la constante es cero. Esta constante C es fácil de hallar; supongamos que $x = a$

$$F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0$$

de modo que $C = -F(a)$, de modo que:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$$

Pero eligiendo x=b, resulta

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Este resultado nos permite calcular integrales definidas.
Ejemplo 1: Queremos encontrar

$$\int_1^2 xdx$$

Primero buscamos una familia de primitivas:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Luego evaluamos esta función en los límites de integración:

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1^2}{2} + C = \frac{1}{2} + C \\ F(2) &= \frac{2^2}{2} + C = 2 + C \end{aligned}$$

Sólo queda restar estos valores:

$$\int_1^2 x dx = (2 + C) - (\frac{1}{2} + C) = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2: Queremos encontrar

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx$$

Primero buscamos una familia de primitivas:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

Luego evaluamos esta función en los límites de integración:

$$\begin{aligned} F(\pi) &= -\cos(\pi) + C = -(-1) + C = 1 + C \\ F(2\pi) &= -\cos(2\pi) + C = -1 + C \end{aligned}$$

Sólo queda restar estos valores:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = (-1 + C) - (1 + C) = -2$$

Notación: Al aplicar la regla de Barrow es usual recurrir a la siguiente notación

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde} \quad F' = f$$

Integral definida usando el método de sustitución

Cuando calculamos una integral definida mediante el método de sustitución debemos ser cuidadosos al establecer los límites de integración en la nueva variable. Existen dos caminos posibles para resolver este tipo de integrales; un camino es resolver la integral indefinida y luego volver a la variable original sin cambiar los límites de integración, el otro es modificar los límites de integración de acuerdo a la sustitución elegida y así no volver a la variable original. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1:

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2 + 1} dx$$

Usando el primer camino (calculando una primitiva de): Llamamos $z = 2x^2 + 1$, de modo que $dz = 4xdx$, así

$$\int x\sqrt{2x^2 + 1} dx = \int \sqrt{z} \frac{1}{4} dz$$

De modo que

$$\int \sqrt{z}\frac{1}{4}dz = \frac{1}{4}\int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{4}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}} + C$$

Y volviendo a la variable original

$$\int x\sqrt{2x^2+1}dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ahora ponemos los límites de integración y usamos la regla de Barrow

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}|_0^2 = \frac{1}{6}(2\cdot 2^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(2\cdot 0^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Haciendo las cuentas

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx == \frac{1}{6}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{13}{3}$$

Veamos qué sucede si seguimos el otro camino; para esto tenemos que ver los valores que toman los límites de integración una vez que hacemos el cambio de variables $z = 2x^2+1$. En este caso se ve que para $x = 0$ resulta $z = 1$ y que para $x = 2$ resulta $z = 9$. Así, sin volver a la variable original, calulamos

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}dx = \int_1^9 \sqrt{z}\frac{1}{4}dz = \frac{13}{3}$$

Por supuesto, ambos resultados coinciden, usando uno y otro camino.

Ejemplo 2: Determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que para toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumpla que

$$\int_5^{10} f(x)dx = c\int_a^b f(\frac{t+1}{2})dt$$

Primero hacemos un cambio de variables en la integral de la derecha; llamamos $z = \frac{t+1}{2}$, de modo que $dz = \frac{1}{2}dt$. Además,

$$\text{cuando} \quad t = a \Rightarrow z = \frac{a+1}{2} \quad \text{y cuando} \quad t = b \Rightarrow z = \frac{b+1}{2}$$

Entonces

$$c\int_a^b f(\frac{t+1}{2})dt = c\int_{\frac{a+1}{2}}^{\frac{b+1}{2}} 2f(z)dz$$

Pero esto implica que

$$\int_{5}^{10} f(x)dx = 2c \int_{\frac{a+1}{2}}^{\frac{b+1}{2}} f(z)dz$$

Por lo tanto

$$2c = 1 \quad ; \quad \frac{a+1}{2} = 5 \quad y \quad \frac{b+1}{2} = 10$$

Es decir que

$$c = \frac{1}{2} \quad ; \quad a = 9 \quad y \quad b = 19$$

Integral definida usando integración por partes

Recordemos que para hallar primitivas mediante este método usábamos la relación

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Así, en el caso de tener que calcular $\int_a^b udv$, debemos tener en cuenta que los límites de integración deben afectar a ambos términos de la ecuación de arriba. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo:

$$\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx$$

Elegimos

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ v' = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx = x(-\cos(x))|_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} 1(-\cos(x))dx = -x\cos(x)|_0^{\pi} + \sin(x)|_0^{\pi}$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx = -\left[\pi\cos(\pi) - 0\cos(0)\right] + \left[\sin(\pi) - \sin(0)\right]$$

Finalmente

$$\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx = -\left[\pi(-1)\right] + \left[0 - 0\right]$$

Haciendo las cuentas

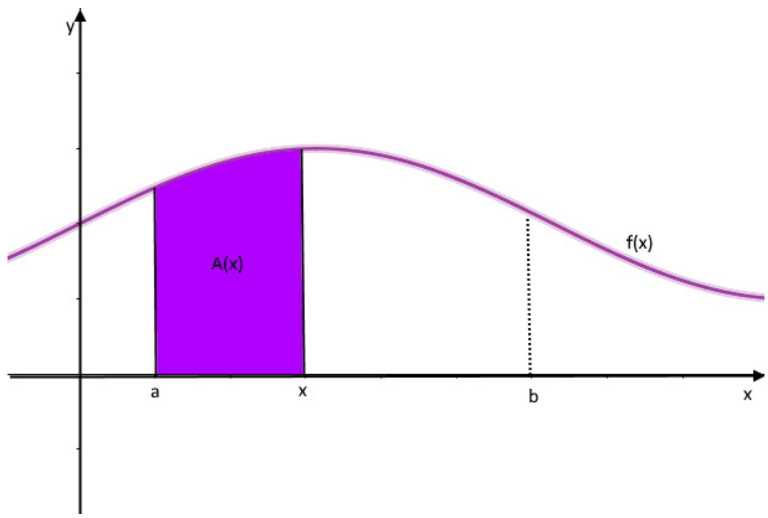
$$\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx = \pi$$

Áreas

Una de las aplicaciones más importantes de la integral es el cálculo de áreas. En este apartado esbozaremos la conexión que existe entre la idea de área y la noción de integral[1].

Interpretación geométrica de la integral definida

Consideremos una función positiva $f : [a, b]$ y continua. Para cada $x \in [a, b]$ definimos: $A(x)$ =área comprendida entre el gráfico de f y el eje de las abscisas en el intervalo $[a, b]$
Gráficamente

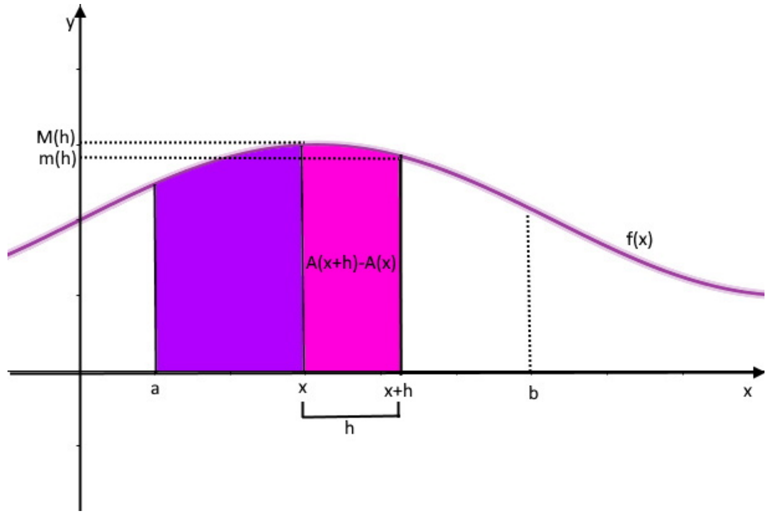


Calculemos el cociente incremental:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

y observemos qué sucede cuando $(h \to 0)$. Es claro que el área comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[x; x+h]$ es $A(x+h) - A(h)$ (Supongamos, para fijar ideas y sin pérdida de generalidad que $h > 0$). Como se observa en el siguiente gráfico

[1]En los libros de texto se podrá encontrar un tratamiento más formal mediante sumas de Riemann.



Si definimos

$$\begin{aligned} m(h) &= \text{mínimo valor de f en}[x; x+h] \\ M(h) &= \text{máximo valor de f en}[x; x+h] \end{aligned}$$

Se puede observar gráficamente que $A(x+h) - A(h)$ se encuentra entre los valores de las áreas de los rectángulos de base h y altura $m(h)$ y $M(h)$ respectivamente. Es decir

$$hm(h) \leq A(x+h) - A(h) \leq hM(h)$$

Dividiendo por h el cociente incremental queda

$$m(h) \leq \frac{A(x+h) - A(h)}{h} \leq M(h)$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$ en los tres términos, vemos que tanto $m(h)$ como $M(h)$ tienden a $f(x)$, mientras que el cociente incremental tiende a la derivada de A en (x), es decir

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

De lo que se concluye que

$$A'(x) = f(x)$$

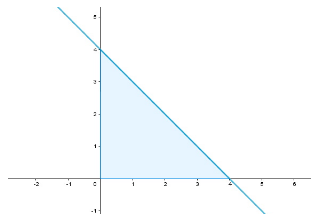
La restricción hecha en un principio, de que la función f fuera positiva, fue al sólo efecto de fijar ideas. Este resultado puede generalizarse como se hace a continuación. ***Observación***: El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$,$y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son funciones continuas en $[a; b]$ y $f \geq g$ para todo x en $[a; b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Vale notar que el caso especial $g(x) = 0$, remite al explicado anteriormente.

Ejemplo 1:

Calcular el área de la figura



Antes de comenzar a calcular el área usando las herramientas de cálculo que acabamos de aprender, veamos que podemos calcularla fácilmente dado que es un triángulo rectángulo cuyas base y altura miden 4 unidades; así, recordando que $A = \frac{base \cdot altura}{2}$, es inmediato deducir que $A = 8$.

Ahora tratemos de reproducir este resultado apelando al cálculo de áreas mediante integrales definidas, esto es

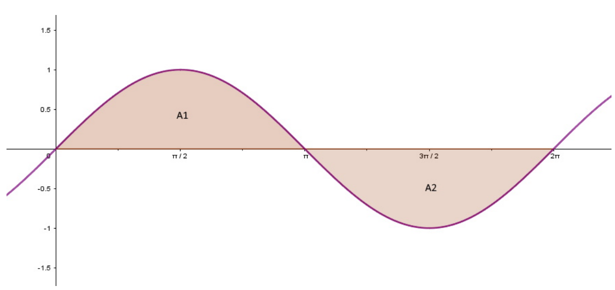
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En este caso es claro que $g(x) = 0$ (el eje de las abscisas) y f es la función lineal que pasa por los puntos $(4; 0)$ y $(0, 4)$, es decir $f(x) = -x + 4$. Además, los límites de intetración en este caso son las rectas $x = 0$ y $x = 4$. De modo que

$$A = \int_0^4 (-x + 4)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 4x\right]_0^4 = -8 + 16 = 8$$

Ejemplo 2:

Calcular el área de la figura, donde la función es $f(x) = sen(x)$.



En este caso vamos a tener que calcular el área total como suma de dos áreas. Podemos ver a partir de la simetría de la función $f(x) = sen(x)$, que basta con calcular una de las dos áreas ya que ambas son iguales ($A_1 = A_2$), pero calculemos ambas de todos modos para fijar conceptos.

$$A_1 = \int_o^\pi (\sin(x) - 0)dx = -\cos(x)|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

En tanto

$$A_2 = \int_\pi^{2\pi} (0 - \sin(x))dx = \cos(x)|_\pi^{2\pi} = 1 - (-1) = 2$$

Entonces, el área total será $A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$.

Aplicaciones

En las aplicaciones de derivadas vimos que la velocidad de un móvil cuya posición en función del tiempo es $f(t)$ es justamente su derivada en función del tiempo. Podemos plantearnos entonces si, conocida una función para la velocidad del objeto $v(t)$, podríamos encontrar otra que nos de su posición en función del tiempo.

Ejemplo:

Calcular la posición a los $10seg$ de un móvil que recorre un camino recto si se sabe que en el instante inicial se encontraba a $3m$ del origen del camino y la velocidad en cada instante está dada por $v(t) = 6t^2 m/seg$.

La posición $f(t)$ será la primitiva de $v(t)$ que satisfaga que $f(0seg) = 3m$. Calculamos pues

$$\int v(t)dt = \int 6t^2 dt = 2t^3 + C$$

La constante de integración C queda determinada por las condiciones iniciales, en este caso

$$f(0) = 3 = 2 \cdot 0^3 + C \quad \Rightarrow C = 3$$

Hemos podido encontrar una función que nos diga la posición del objeto en función del tiempo, en este caso

$$f(t) = 2t^3 + 3$$

Así, si queremos conocer la posición a los $10seg$, sólo queda evaluar la función

$$f(10seg) = (2 \cdot 1000^3 + 3)m = 2003m$$