ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchos fenómenos físicos de interés para la ingeniería se analizan en base a modelos matemáticos que intentan explicar el comportamiento de los mismos, en el planteo de los éstos es común que se establezcan relaciones entre las variables de interés y sus derivadas o sus diferenciales.

Por ejemplo un modelo aplicable a la física, establece que en un movimiento rectilíneo uniforme un móvil se desplaza con velocidad constante. Si consideramos que $x(t)$ es la función que representa la posición de un móvil en función del tiempo el modelo anterior podría escribirse en términos de esta función de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

donde el primer término representa la velocidad como derivada de la posición respecto del tiempo.

Por otro lado, un modelo que describe el crecimiento poblacional fue el enunciado por Malthus y establece que: La población de una especie varía con una velocidad proporcional a la población existente en un determinado momento.

Nuevamente, si llamamos $P(t)$ a la función que describe la población en un instante t, el modelo enunciado podría describirse por la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $\frac{dP}{dt}$ representa la velocidad de variación.

En ambos modelos se establece la relación entre una función desconocida ($x(t)$ y $P(t)$), las variables de las cuales depende y sus derivadas y diferenciales. A este tipo de ecuaciones se las denomina ecuaciones diferenciales.

Definición. Llamaremos ecuación diferencial ordinaria (EDO) a toda ecuación que involucre a una función incógnita - de una única variable independiente - y a sus sucesivas derivadas, incluyendo eventualmente también a la variable independiente.

Si la derivada de mayor orden que aparece es de orden "n", se dice que es una ecuación diferencial ordinaria de orden n.

Las ecuaciones anteriormente mencionadas corresponden a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden 1.

Soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición. Toda función $y = y(x)$ definida en un intervalo I , con al menos n derivadas continuas que al reemplazarla en la ecuación diferencial de orden n, la transforma en una identidad, se considera solución de la ecuación diferencial en I

Ejemplo. Demostrar que $y = \frac{1}{x}$ es solución de

$$xy' + y = 0$$

en el intervalo $(0, +\infty)$.

Ya que $y = \frac{1}{x}$ es una función continua y derivable en el intervalo $(0, +\infty)$, para demostrar lo que nos piden bastará sustituir y e $y^{'}$ por $y = \frac{1}{x}$ y su derivada en la ecuación y ver que llegamos a una identidad.

$$xy^{'} + y = x.\left(\frac{1}{x}\right)^{'} + \left(\frac{1}{x}\right) = x.\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0 \ (1)$$

Podemos ver que $\frac{1}{x}$ verifica la ecuación diferencial y por lo tanto diremos que $y = \frac{1}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy^{'} + y = 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Resolución de Ecuaciones Diferenciales. Para los modelos planteados anteriormente nos podría interesar encontrar la expresión de la función que describe la posición del móvil o la expresión de la función que describe el crecimiento poblacional; para hacerlo deberíamos resolver las ecuaciones diferenciales planteadas anteriormente, es decir, encontrar las funciones $x = x(t)$ y $P = P(t)$ que verifican la ecuaciones diferenciales planteadas. Veamos cómo resolver cada caso:

En el primer modelo la ecuación que diferencial planteada nos quedó:

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

Para encontrar $x = x(t)$ la expresión de la función bastará con integrar

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v_0 dt \\ x(t) &= v_0 t + C \end{aligned}$$

La función que describe la posición de un móvil que se desplaza según un movimiento rectilíneo uniforme está dada por:

$$x(t) = v_0 t + C$$

Podemos observar que en este caso la solución no es una única función sino una familia de funciones ya que la función hallada depende de la constante C. Para que la solución resultara única la ecuación diferencial debería venir acompañada de alguna condición inicial que describa el movimiento del móvil estudiado, por ejemplo, la posición inicial $x(0) = x_0$.

Si aplicamos esta condición inicial a la solución hallada podríamos encontrar el valor de la constante C:

$$x(0) = v_0 \cdot 0 + C = C = x_0$$

La respuesta a la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = v_0$ sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$ es:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

Esto nos da la pauta de que una EDO puede tener toda una familia de soluciones posibles pero, añadiendo condiciones adicionales, se restringe la arbitrariedad en la elección de las mismas.

A la expresión: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ se la conoce como problema a valores iniciales.
Analicemos ahora el siguiente modelo:

$$P^{'} = k.P$$

Si agrupamos los términos correspondientes a la variable dependiente nos queda:

$$\frac{1}{P(t)} P^{'}(t) = k$$

Al igual que hicimos en el ejemplo anterior,para poder encontrar la expresión de la función P , el objetivo último sera integrar, para ello multiplicamos ambos términos por dt e integramos

$$\int \frac{1}{P(t)} P^{'}(t)\, dt = \int k.dt$$

En el caso de la integral de la derecha la respuesta es:

$$k.t + C_1$$

respecto de la segunda integral si llamamos:

$$\begin{aligned} u &= P(t) \\ du &= P^{'}(t)\, dt \end{aligned}$$

La integral nos queda:

$$\int \frac{1}{u}\, du$$

Cuyo resultado nos queda:

$$\ln |u| + C_2$$

De donde la solución de la integral será:

$$\ln |P(t)| + C_2$$

Por lo tanto la ecuación (1) nos queda:

$$\ln |P(t)| + C_2 = k.t + C_1$$

Lo primero que podemos ver es que las dos constantes pueden reducirse a una

$$\ln |P(t)| = k.t + C$$

Para encontrar la expresión de la función P...

$$\begin{aligned} |P(t)| &= e^{k.t+C} \\ P(t) &= \pm e^{C}.e^{k.t} \end{aligned}$$

Para simplicar la expresión a la que llegamos llamaremos A a la constante : $\pm e^{C}$

De donde la función buscada será:

$$P(t) = A.e^{k.t}$$

Observación. En la práctica podemos al resolver la segunda integral podemos omitir el cambio de variable procediendo de la siguiente manera:

$$P = P(t)$$

De donde

$$dP = P^{'}(t)dt$$

De esta manera la integral:

$$\int \frac{1}{P(t)} P^{'}(t)\, dt$$

Nos queda

$$\int \frac{1}{P}\, dP$$

Esta integral nos queda ahora en términos de la variable P y posee la misma forma que la que planteamos en variable u luego del cambio de variable. Si la resolvemos nos queda:

$$\ln|P(t)| + C_2$$

Que es el mismo resultado al que llegamos después del cambio de variables. Por lo tanto si queremos agilizar las cuentas podemos omitir el cambio de variable y resolver la integral considerando a P como variable.

Ejercicio. Encontrar la función $y = f(x)$ que satisface $x^2y + \frac{1}{x}y^{'} = 0$ sabiendo que $y(0) = 3$.

Para resolver este problema podemos seguir unos pasos similares a los seguidos en el último ejemplo.

Nuestro objetivo es encontrar la función $y = f(x)$ que verifica la ED dada

Al igual que hicimos para el modelo poblacional comenzamos separando y agrupando variables:

$$x^2y + \frac{1}{x}y^{'} = 0$$

$$\frac{1}{x}y^{'} = -x^2y$$

$$\frac{1}{y}y' = -x^3$$

Ahora multiplicamos ambos términos por el diferencial de la variable independiente

$$\frac{1}{y}y'dx = -x^3dx \quad (2)$$

Considerando que

$$y = y(x)$$

$$dy = y^{'}(x)dx$$

la ecuación (2) nos queda

$$\frac{1}{y}dy = -x^3 dx$$

Integramos ambos términos:

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int x^3 dx$$

$$\ln|y| \quad = \quad -\frac{x^4}{4} + C$$

Siguiendo un procedimiento análogo al expuesto nos queda como solución:

$$y(x) = Ae^{-\frac{x^4}{4}}$$

Aplicamos condiciones iniciales $y(0) = 3$

$$y(0) \quad = \quad A = 3$$

Por lo tanto la función $y = f(x)$ buscada será

$$y(x) \quad = \quad 3e^{-\frac{x^4}{4}}$$

Verificación:

$$x^2 y + \frac{1}{x}y^{'} = x^2\left(3e^{-\frac{x^4}{4}}\right) + \frac{1}{x}\left(3e^{-\frac{x^4}{4}}\right)^{'} = x^2\left(3e^{-\frac{x^4}{4}}\right) + \frac{1}{x}\left(-3x^3 e^{-\frac{x^4}{4}}\right) = 3x^2 e^{-\frac{x^4}{4}} - 3x^2 e^{-\frac{x^4}{4}} = 0$$

$y = f(x)$ verifica la ED por lo tanto la función hallada es correcta

Ejercicio. Se sabe que la velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba en tiro vertical, se expresa con la función $v(t) = v_0 - g.t$, donde v_0 es la velocidad inicial, g es la aceleración de la gravedad (tomada aproximadamente como 10 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{seg}^2}$, se desprecia fuerza de rozamiento) y t es el tiempo transcurrido, en segundos, desde el lanzamiento. Si se lanza un objeto con una velocidad inicial de 10 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{seg}}$, ¿A qué altura se encontrará el objeto t segundos después de ser lanzado? ¿Cuál será la altura al cabo de 2 segundos?

Nota: recordar que la función velocidad surge de derivar la función posición.

Teniendo en cuenta lo que dice la nota y los valores de velocidad inicial y gravedad, si llamamos $y(t)$ a la altura del objeto en el instante t podemos plantear la ecuación $v(t) = v_0 - g.t$ en términos de la función $y(t)$ de la siguiente manera:

$$y'(t) \quad = \quad 10 - 10.t$$

Para encontrar la expresión de la altura en términos del tiempo t bastará con integrar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int (10 - 10t)\,dt \\ y(t) &= 10t - 5t^2 + C \end{aligned}$$

Donde C representa la altura inicial, podemos suponer que el objeto parte del suelo por lo que su posición inicial es C=0.

Respondamos ahora a las preguntas que nos formula el problema:

¿A qué altura se encontrará el objeto t segundos después de ser lanzado?

Basta con conocer la altura correspondiente a t=1 segundo:

$$y(1) = 10{,}1 - 5\,(1)^2 = 5$$

Después de 1 segundo el objeto se encuentra a 5 metros de la posición inicial.

¿Cuál será la altura al cabo de 2 segundos?

Basta con conocer la altura correspondiente a t=2 segundos:

$$y(2) = 10{,}2 - 5\,(2)^2 = 0$$

Según las cuentas la altura correspondiente a t=2 segundos es 0 metros, ¿Tiene sentido?

Si graficamos la trayectoria del móvil podemos observar que luego de ser lanzado el objeto alcanzá su altura máxima al instante t=1 y luego comienza a descender hasta tocar nuevamente el suelo a los 2 segundos de ser lanzado.