Universidad de Buenos Aires

UBA XXI

ANÁLISIS MATEMÁTICO A

Ingeniería - Ciencias Exactas y Naturales

EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Universidad de Buenos Aires

UBA XXI

Silvina Del Duca

Silvia Vietri

Índice general

Notas para Práctica 2

Ejercicios resueltos

2.1. Límites

Ejercicio 2.1. La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$, donde a es una constante positiva, tiene dos raíces que dependen del valor de a:

$$r_1(a) = -\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{1+a}}{a} \quad \text{y} \quad r_2(a) = -\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1+a}}{a}$$

a. Verificar que si $a > 0$, las dos raíces de la ecuación son reales, una positiva y la otra negativa.

b. Calcular $\lim_{a\to 0} r_1(a)$ y $\lim_{a\to 0} r_2(a)$.

c. Interpretar los resultados obtenidos, trazando simultáneamente la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, para valores de a tendiendo a cero (por ejemplo, $a = 1;\ 0,5;\ 0,2;\ 0,1;\ 0{,}05$).

Solución:

a. Para verificar que si $a > 0$, las dos raíces de la ecuación son reales (una positiva y la otra negativa), analicemos cada una de ellas:

$r_1(a) = \frac{\sqrt{1+a}-1}{a}$: como $a > 0$, el radicando es positivo y mayor que 1, por lo tanto el numerador es positivo y el denominador también. Entonces $r_1(a)$ es una raíz real y positiva de la ecuación dada;

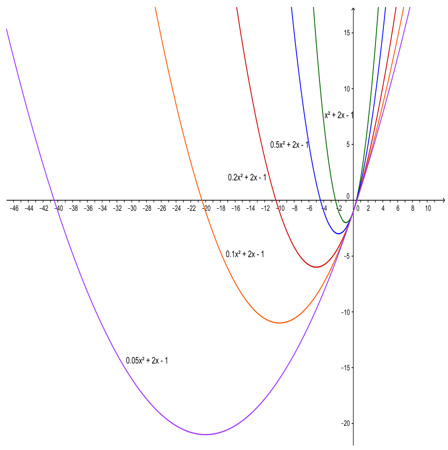
$r_2(a) = -\frac{\left(\sqrt{1+a}+1\right)}{a}$: como antes, tiene un radicando positivo, mayor que 1, por lo tanto el numerador es positivo y el denominador también. Pero el signo menos adelante, cambia el signo de la raíz. Entonces $r_2(a)$ es una raíz real y negativa de la ecuación dada.

b. Calculemos el límite de estas dos funciones, cuando el valor de a tiende a cero:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} r_1(a) &= \lim_{a\to 0} \frac{(\sqrt{1+a}-1)}{a} \cdot \frac{(\sqrt{1+a}+1)}{(\sqrt{1+a}+1)} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{1+a-1}{a\,(\sqrt{1+a}+1)} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+a}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} r_2(a) &= \lim_{a\to 0} -\frac{(\sqrt{1+a}+1)}{a} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

c. Veamos el gráfico para distintos valores de a



2.2. Asíntotas

Ejercicio 2.2. Hallar todas las asíntotas de la función $f(x) = 2x + \sqrt{1+x^2}$.

Solución:

Asíntota horizontal: $y = c$.

- En este caso hay que analizar el limite de la función tendiendo a más y menos infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)=-\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, no hay asintota horizontal.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$

- Iniciamos calculando el valor de la pendiente. Para lo cual, es necesario, primero, analizar lo que sucede cuando $x \to -\infty$:
  - $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
  - Como en este caso x es menor que cero, podemos escribir $\frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}$
  - $m = \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = 1$
  - Entonces la pendiente de la recta oblicua vale 1
  - Estudiemos la existencia de b para el valor de m hallado:

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{1+x^2}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{(x-\sqrt{1+x^2})}{(x-\sqrt{1+x^2})}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x-\sqrt{1+x^2}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

  - Podemos afirmar que $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x$, cuando x tiende a menos infinito.

- Ahora analizamos lo que sucede cuando $x \to +\infty$:
  - Como en este caso x es mayor que cero, entonces podemos escribir $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

- Calculamos el valor de m:

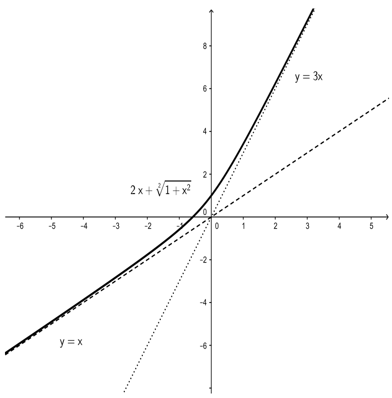
$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2+\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

- Entonces la pendiente de la recta oblicua vale 3
- Estudiemos la existencia de b para el valor de m hallado:

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to+\infty} f(x)-mx \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{1+x^2}-3x \\
&= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}-x)\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0
\end{aligned}$$

- Podemos afirmar que $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = 3x$, cuando x tiende a más infinito.

Por el análisis efectuado del comportamiento de la función, concluimos que $f(x)$ tiene asíntotas oblicuas cuando $x \to \pm\infty$. Como su dominio son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales. Y como se vio, tampoco tiene asíntota horizontal. Si usamos algún programa de matemática, se puede observar que la gráfica es la siguiente:



2.3. Continuidad

Ejercicio 2.3. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{3x-3} & si \quad x > 1 \\ \frac{x^2-x}{4x-4} & si \quad x < 1 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de $f(x)$.

Solución:

- Si $x > 1$, $f(x)$ es continua ya que se trata de un cociente de funciones continuas, porque el denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece al conjunto que se analiza.

- Si $x < 1$, $f(x)$ es continua por ser cociente de funciones continuas, ambos polinomios; y el denominador se anula en $x = 1$ que tampoco está en el intervalo que se analiza.

- En $x = 1$, la función no está definida, por lo tanto falla la primera condición de continuidad. Ya sabemos que la función es discontinua en $x = 1$.

- Analicemos qué tipo de discontinuidad tiene en ese punto (evitable, o esencial o no evitable). Para eso calculamos x tendiendo a 1 por derecha y luego por izquierda.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} f(x) \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{3x-3} \\ &= \lim_{x \to 1^+} (\frac{\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(3x-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x})^2-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{3(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-x}{4x-4} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{4(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como los límites laterales son distintos, entonces no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, es decir, la discontinuidad en $x = 1$ es esencial o no evitable.

2.4. Teorema de Bolzano

Ejercicio 2.4. Dada la siguiente ecuación, demostrar que tienen alguna solución real.

$$x\ \cos(\frac{x}{2}) + 15\ \sin(x) = 15$$

Solución:

- Armemos la función $f(x) = x\ \cos(\frac{x}{2}) + 15\ \sin(x) - 15$. Queremos probar que existe por lo menos un valor real donde f vale cero
- Como es una suma algebraica de funciones continuas en todos los reales, es una función continua en $\mathbb{R}$
- Aplicaremos entonces el *Teorema de Bolzano* en el intervalo $[0,\ \frac{\pi}{2}]$

  $f(0) = 0.\cos(0) + 15\sin(0) - 15 = -15 < 0$

  $f(\pi/2) = \frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{4}) + 15\sin(\frac{\pi}{2}) - 15 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 15 - 15 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 0.$
- Entonces, como f es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y tiene signo contrario en los extremos del intervalo, por *Teorema de Bolzano*, existe por lo menos un punto $c\epsilon[0, \frac{\pi}{2}]$, donde $f(c) = 0$, es decir, existe por lo menos una solución de la ecuación dada.