Operaciones entre números reales. Propiedades

Las operaciones entre números reales se definen de manera análoga a las operaciones entre números racionales y tienen las mismas propiedades.

Recordamos las propiedades de estas operaciones.

Operaciones en el conjunto de los números racionales.

Suma y multiplicación.

En el conjunto de los números racionales están definidas dos operaciones: la *adición* y la *multiplicación*.

- Por *adición* entendemos que a todo par de números racional **a**, **b** se le asigna un número racional llamado **suma de a con b** que indicamos

$$\mathbf{a + b}$$

- Por ***multiplicación*** entendemos que a todo par de números racionales **a**, **b** se le asigna un número racional llamado **producto de a con b** que indicamos

$$\mathbf{a \cdot b}$$

Propiedades

Cualesquiera sean los números racionales **a**, **b** y **c** se verifican las siguientes propiedades:

	De la adición	De la multiplicación
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia de elemento neutro	**0** es el elemento neutro pues: $a + 0 = 0 + a = a$ El elemento neutro es único	**1** es el elemento *neutro* pues: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ El elemento neutro es único
Existencia de elemento inverso	**-a** es el *inverso aditivo* de **a** $a + (-a) = (-a) + a = 0$ Al inverso aditivo de a se lo llama **opuesto de a.** • El inverso aditivo es único	$a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el *inverso multiplicativo* de a $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (si $a \neq 0$) Al inverso multiplicativo de a se lo llama **recíproco de a.** • El inverso multiplicativo es único
	Si $a = \frac{2}{3}$; $-a = -\frac{2}{3}$ Si $a = -\frac{4}{9}$; $-a = -\left(-\frac{4}{9}\right)$	Si $a = \frac{5}{7}$; $a^{-1} = \frac{7}{5}$ Si $a = \frac{3}{5}$; $a^{-1} = \frac{5}{3}$

La ***propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición***, vincula ambas operaciones:

- Cualesquiera sean los números reales **a**, **b** y **c** vale que:

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Observación

- *En el conjunto de los números naturales no se verifican las propiedades de neutro e inverso aditivo para la adición, ni la de inverso multiplicativo.*
- *En el conjunto de los números enteros, no se verifica la propiedad de inverso multiplicativo.*

Resta y División

La existencia del opuesto permite definir la resta como la operación inversa de la suma:

- Restar dos números reales **a y b** significa **sumar a con el opuesto de b.**

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)$$

La existencia del inverso multiplicativo, excepto para el cero, permite definir la división como la operación inversa de la multiplicación:

- Dividir dos números reales a y b (con $b \neq 0$) significa **multiplicar a por el recíproco de b**

$$a : b = a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad \frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)$$

De las propiedades enunciadas se deducen otras que conviene recordar:

Otras propiedades

- *El opuesto de la suma es la suma de los opuestos:*

$$\mathbf{-(a + b) = -a + (-b)}$$

- *El producto de cualquier número racional por (-1) es igual al opuesto aditivo del número racional:*

$$\mathbf{a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = (-a)}$$

- *El producto de un número racional por cero es cero:*

$$\mathbf{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$$

- Si $\mathbf{a \cdot b = 0}$ entonces $\mathbf{a = 0}$ **ó** $\mathbf{b = 0}$
- *Ley cancelativa:*
  - *de la suma:* Si $\mathbf{a + c = b + c}$ entonces $\mathbf{a = b}$
  - *del producto:* Si $\mathbf{a \cdot c = b \cdot c}$ **y** $\mathbf{c \neq 0}$ entonces $\mathbf{a = b}$

Las propiedades que enunciamos para los números racionales nos permiten resolver situaciones en las que intervienen números irracionales.

Por ejemplo:

$$\mathbf{5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}}$$

También son válidas las propiedades de la multiplicación,

$$\mathbf{3\sqrt{5} \cdot 2\,\pi = 6\sqrt{5}\,\pi}$$

Para resolver situaciones, en las que intervienen raíces de números naturales, sin recurrir a aproximaciones es importante detenerse en la potenciación y la radicación de números reales.

Potenciación

- Si **a** es un número real cualquiera, y ***n*** es un entero positivo entonces la **potencia enésima de a** es:

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad factores}}$$

- $\mathbf{a^n}$ es la ***potencia*** enésima de a
- ***a*** se denomina ***base***
- ***n*** es el ***exponente***

$\mathbf{a^n} \rightarrow$ exponente
$\downarrow$
base

Recordamos que

- $a^0 = 1$ para $a \neq 0$
- $a^1 = a$

- Si *n* es un entero positivo y $a \neq 0$, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo

$$5^{-1} = \frac{1}{5} \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

- En particular: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

Por ejemplo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Propiedades

La potenciación de números reales tiene las siguientes propiedades

Para a y b números reales y m y n enteros

- Producto de potencias de igual base

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$$

- Cociente de potencias de igual base

  $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$

  $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^2 = 9$

- Potencia de potencia

  $(a^n)^m = a^{n.m}$

  $\left((-5)^2\right)^3 = (-5)^6 = 15.625$

Además la potenciación es distributiva respecto a la multiplicación y la división.

- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

  $(-2 \cdot 4)^3 = (-2)^3 \cdot 4^3$
  $= (-8) \cdot 64 = -512$

- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad a;\ b \neq 0$

  $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

Veamos un ejemplo.

Calcular las siguientes potencias

a. $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3$ b. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^0$ c. 2^{-2} d. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

Solución

a) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3 = -\dfrac{2^3}{5^3} = -\dfrac{8}{125}$

por propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^0 = 1$ porque que $a^0 = 1$ para todo número real $a \neq 0$.

c) $2^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1^2}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Porque $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ para $a \neq 0$ y por propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división.

d) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

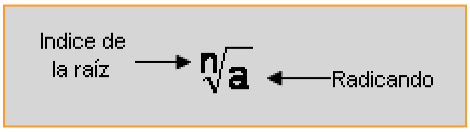
Porque $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ para $a \neq 0$ y por propiedad distributiva de la potenciación respecto a la división.

Exponente fraccionario

La expresión $a^{\frac{1}{n}}$, con ***n*** entero mayor que 1, recibe el nombre de ***raíz n-ésima de a.***

La expresión $a^{\frac{1}{n}}$ se representa también mediante $\sqrt[n]{a}$.

Así: $a^{\frac{1}{2}}$ es la *raíz cuadrada de a* y $a^{\frac{1}{3}}$ es la *raíz cúbica de a.*



Recordamos que:

- Si *n* es par, *a* debe ser mayor o igual que cero.
- Si *n* es impar, *a* puede tomar cualquier valor real, positivo, nulo o negativo.

En particular definimos.

Definición:
Si $a \geq 0$ es un número real llamamos *raíz cuadrada de a* y lo simbolizamos $\sqrt{a}$ al único número real $b \geq 0$ tal que $b^2 = a$.

Es decir que:

$$\sqrt{a} = b \text{ si y sólo si } b \geq 0 \text{ y } b^2 = a$$

Proposición: Si a es un número real cualquiera $\sqrt{a^2} = |\, a \,|$

Definición

Si **m** y **n** son números naturales

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m.\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Podemos extender las propiedades de la potenciación ya enunciadas a las potencias expresadas en forma fraccionaria.

Propiedades:

Si a es un número real y a > 0 valen las siguientes propiedades

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ Producto de potencias de igual base
2. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}$ Potencia de potencia
3. $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ Distributividad respecto a la multiplicación.

Veamos algunos ejemplos:

Calcular aplicando propiedades de la potenciación

1. $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16}$

Usando la notación de exponente fraccionario y propiedades de la potenciación escribimos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16} &= 16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} \\ &= 16^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 16^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

2. $\sqrt[4]{\dfrac{256}{625}}$

Como la potenciación es distributiva respecto a la división,

$$\sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{4}{5}$$

3. $(\sqrt[3]{6})^5$

Por la definición de exponente fraccionario y potencia de una potencia;

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{6})^5 &= \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^5 \\ &= 6^{\frac{1}{3}.5} = 6^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

4. $\sqrt{(-16)^2}$

Podemos pensar la solución de dos maneras;

- Aplicando la propiedad $\sqrt{a^2} = |a|$, es:

$$\sqrt{(-16)^2} = |-16| = 16$$

- También podemos resolverlo así:

$$\sqrt{(-16)^2} = \sqrt{256} = 16$$

5. $\sqrt{-5+7} \cdot \sqrt{-2+4}$

Como la potenciación no es distributiva, respecto a la suma, primero resolvemos estas operaciones en cada radicando

$$\sqrt{-5+7} \cdot \sqrt{-2+4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

Luego podemos hacer;

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Supresión de raíces en el denominador

Expresiones como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt[3]{16}}\ ;\ \frac{1}{3-\sqrt{5}}\ ;\ \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

que contienen raíces en el denominador, pueden escribirse en forma equivalente de modo que la nueva expresión no contenga raíces en el denominador. Vemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$ y aplicando propiedades de la potenciación es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2 $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt[5]{2^2}$ (ya que $2^3\cdot 2^2 = 2^5$)
Aplicando propiedades de la potenciación es:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^2}}{2}=\sqrt[5]{2^2}$$

En ambos ejemplos en el denominador se tiene una expresión del tipo $\sqrt[n]{a^m}$. Se busca multiplicar numerador y denominador por otra expresión con el mismo índice, $\sqrt[n]{a^p}$, y tal que el producto de sus bases a^m y a^p sea una potencia de a^n.

Ejemplo 3. $\frac{4}{1-\sqrt{5}}$

El denominador es en este caso una diferencia entre dos números. Multiplicando numerador y denominador por la suma de ellos, y operando es:

$$\frac{4}{1-\sqrt{5}}=\frac{4\cdot(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{4\cdot(1+\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{4\cdot(1+\sqrt{5})}{-4}=-(1+\sqrt{5})$$

Cuando el denominador es la suma o diferencia de dos números, en donde uno de ellos o ambos es un irracional cuadrático, se multiplica el numerador y el denominador por la diferencia de los términos del denominador, en el caso de una suma, o por la suma en el caso de una diferencia. Así el denominador queda expresado en la forma:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ecuaciones en el conjunto de los números reales

Una *ecuación* es una igualdad que contiene uno o más números desconocidos llamados *incógnitas*.

En este apartado trataremos ecuaciones con una sola incógnita. Habitualmente a la incógnita la denominamos “x”

Son ejemplos de ecuaciones con una sola incógnita:

$$3x + 2 = 4x - 1$$

$$|x - 3| = -2$$

Cada valor de la variable que al sustituirlo en la ecuación, hace que la misma se transforme en una igualdad numérica se denomina ***solución*** de la ecuación dada. Decimos que tal valor satisface o verifica la ecuación.

Por ejemplo, 3 es solución de $3x + 2 = 4x - 1$ ya que al sustituir por 3 en la ecuación obtenemos:

$$3.\,3 + 2 = 4.\,3 - 1$$

$$9 + 2 = 12 - 1$$

$$11 = 11$$

que es una igualdad numérica.

Para encontrar las soluciones de una ecuación, realizamos operaciones que permiten ir transformando la ecuación dada en otras equivalentes.

Mediante estas operaciones intentamos aislar la incógnita (“despejar”) en uno de los miembros. En estos casos utilizamos propiedades de las operaciones con números reales.

En este texto, trabajaremos ecuaciones lineales o que se reducen a ellas.

Son ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{a.\,x = b}$$

Donde

- **x** es la incógnita,
- **a** y **b** son números reales y $a \neq 0$
- **a** se llama coeficiente y **b** término independiente.

Se denominan de primer grado (o ecuaciones lineales) porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia 1.

Para recordar

- Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita (o incógnitas) que hace verdadera la igualdad. A estos valores se los llama ***solución*** de la ecuación.
- Cuando un número es solución de una ecuación suele decirse que “satisface” o “verifica” la ecuación.
- Resolver una ecuación significa hallar todas las soluciones si las tiene o demostrar que no las tiene.

Revisaremos mediante ejemplos, cómo resolver ecuaciones en el conjunto de los números reales

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación $-2x + 5 = -3$

Solución

$-2x + 5 = -3$	
$-2x + 5 - 5 = -3 - 5$	Sumando miembro a miembro –5
$-2x = -8$	Realizando operaciones
$x = (-8) : (-2)$	Dividiendo miembro a miembro por –2
$x = 4$	Realizando operaciones.

Debemos asegurarnos que $x = 4$ es solución de la ecuación $-2x + 5 = -3$.

Para ello, reemplazamos el valor de x que encontramos en la ecuación:

$$-2.\ 4 + 5 = -8 + 5 = -3$$

Como vemos que se cumple la igualdad, podemos afirmar que $x = 4$ es solución de la ecuación dada.
Escribimos el conjunto solución de esta manera:

$$\mathbf{S = \{4\}}$$

Observamos que:

- Cada paso que se realiza para resolver una ecuación la transforma en otra más simple. Se forman así ***ecuaciones equivalentes*** la última de las cuales es la solución.
- Llamamos ***ecuaciones equivalentes*** a un conjunto de ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones.
- Para transformar una ecuación dada en otra equivalente se puede:
    - Sumar o restar la misma expresión en ambos lados de la ecuación.
    - Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplo 2.

Resolver $3(x - 1) = -x + 1$

Solución.

$3(x - 1) = -x + 1$	
$3x - 3 = -x + 1$	Distribuyendo en el primer miembro.
$3x - 3 + 3 = -x + 1 + 3$	Sumando miembro a miembro 3
$3x = -x + 4$	Resolviendo operaciones
$3x + x = -x + 4 + x$	Sumando miembro a miembro x
$4x = 4$	Resolviendo operaciones
$x = 4 : 4$	Dividiendo miembro a miembro por 4.
$x = 1$	

Para asegurarnos que $x = 1$ es solución de la ecuación $3(x - 1) = -x + 1$ reemplazamos:

$$3(1-1) = -1 + 1 \rightarrow 3.\ 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Podemos afirmar que la solución es $x = 1$ pues al reemplazar en la ecuación dada se verifica la igualdad:

Escribimos el conjunto solución de esta manera:

$$\mathbf{S = \{1\}}$$

Ejemplo 3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 1 = -2(1 - 2x)$

b) $3x - 2 = 2(x - 1) + x$

Solución

Resolvemos el ítem a)

$4x - 1 = -2(1 - 2x)$	
$4x - 1 = -2 + 4x$	Distribuyendo.
$4x - 1 - 4x = -2 + 4x - 4x$	Sumando el opuesto de 4x.
$-1 = -2$	Resolviendo las operaciones.

Al resolver las operaciones se llega a un absurdo. Así se concluye que la ecuación planteada **no tiene solución**

Se dice que el conjunto solución es vacío y se escribe **S =** $\varnothing$

Resolvemos el ítem b)

$3x - 2 = 2(x - 1) + x$	
$3x - 2 = 2x - 2 + x$	Distribuyendo
$3x - 2 = 3x - 2$	Asociando y resolviendo las operaciones.
$3x - 3x = -2 + 2$	Agrupando los términos en x en un miembro y los números en el otro
$0 = 0$	

En este caso, al resolver las operaciones se llega a una igualdad.

Esto significa que la ecuación planteada se verifica para cualquier número real.

Esto es, tiene **infinitas soluciones.**

Por ejemplo $x = 1$ satisface la ecuación, pues al reemplazar en la ecuación dada es:

$$3.1 - 2 = 2(1 - 1) + 1 \rightarrow 1 = 0 + 1 = 1$$

Y también $x = 0$ satisface la ecuación, pues

$3.0 - 2 = 2(0-1) + 0 \rightarrow -2 = 2.(-1) = -2$

Podríamos de este modo, encontrar infinitos números reales que verifican la ecuación. Por lo que el conjunto solución es el de los números reales.
Lo expresamos:

$$\mathbf{S} = \Re$$

Revisando los resultados de cada una de las ecuaciones planteadas, se observa que una ecuación lineal de primer grado con una incógnita puede:

- tener **una solución**,
- **no tener solución**,
- **tener infinitas soluciones.**

Ecuaciones y resolución de problemas

En muchas ocasiones para resolver situaciones problemáticas enunciadas en lenguaje corriente o coloquial es necesario traducir las condiciones del problema a un lenguaje simbólico apropiado para su resolución. Es decir, plantear una ecuación que exprese en símbolos matemáticos una condición planteada con palabras.

Para ello es necesario tener en cuenta los siguientes pasos.

- Leer comprensivamente el enunciado.
- Identificar la(s) incógnita(s)
- Traducir al lenguaje simbólico
- Expresar mediante una ecuación las condiciones que deben cumplir las incógnitas.
- Resolver la ecuación.
- Analizar si la solución hallada responde a las condiciones del problema.

Ejemplo 4

Si a un número se lo multiplica por 8 el resultado es el mismo número aumentado en 21. Encontrar dicho número.

Solución.

- La incógnita es un número real → x
- Traducir al lenguaje simbólico:
  - a un número se lo multiplica por 8 → $8.\ x$
  - el mismo número aumentado en 21 → $x + 21$
- Expresión de la ecuación → $8x = x + 21$
- Resolución de la ecuación:

$8x - x = 21$	Restando miembro a miembro x.
$7x = 21$	Resolviendo la resta
$\underline{x = 3}$	Dividiendo miembro a miembro por 7

- Verificar si la solución planteada responde a las condiciones del problema.

$$8.\ 3 = 24 = 3 + 21$$

Como se cumplen las condiciones, el número buscado es $x = 3$.