Análisis Matemático A (para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)
NOTAS SOBRE LÍMITES

Andrés Juárez
Melisa Proyetti Martino
Silvina De Duca
Silvia Vietri

Índice general

Notas para Práctica 2

Límites y Continuidad

El concepto de límite es fundamental para esta materia. En base a la idea de límite se apoyará el resto de la teoría que veremos en las siguientes unidades. Por este motivo es muy importante que dispongas del tiempo requerido para dominar estos temas, releyendo la teoría y los ejemplos las veces que necesites.

2.1. Límite en un punto

El estudio de límites lo dividiremos en dos grandes bloques: límites en el infinito y límites en un punto. Comenzaremos viendo límites en un punto de manera intuitiva para, luego, llegar a una definición formal.

2.1.1. Noción informal

Nos interesará saber, por distintos motivos, si los valores de una determinada función se aproximan a un número cuando la evaluamos en valores cercanos a un punto que será de particular interés. Es decir que nos moveremos por el *dominio* de la función, acercándonos a un punto en donde deseemos realizar el estudio -este punto puede o no pertenecer al dominio de la función-, y miraremos qué sucede con los valores de la función. Precisando un poco más, en general a una función la denotamos con la letra f, y al punto de interés lo llamaremos x_0 o a, números reales. Por lo tanto, tendremos en cuenta qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando x tiende, o se acerca, al valor a.

Algunos de los motivos por los que tendremos que estudiar esto pueden ser:

- La imposibilidad de evaluar la función en el punto exacto por ser un valor irracional. Por ejemplo, si quisiéramos obtener el valor de $f(\sqrt{2})$ en una función cualquiera, como no podremos realizar el cálculo con $\sqrt{2}$, debido a que tiene infinitos decimales, podríamos pensar que alcanzaría con tomar un solo decimal y evaluar en 1,4, sabiendo que el valor de la imagen no presentará mayores variaciones. Esto no siempre es cierto. Si la función fuera $f(x) = x+3$ la precisión será de un decimal y no tendremos ningún problema. En cambio, si la función fuera $f(x) = \frac{100}{x-7/5}$ no podríamos tomar 1.4 porque nos quedaría una división por cero. Y aún tomando dos decimales la precisión es muy pobre, ya que cometeríamos un error de casi 3 mil unidades! (comprobar con una calculadora).

- La función podría no estar definida en el punto de interés. Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ no está definida en $x = 0$. Sin embargo, alrededor del punto sí está definida y querríamos saber qué sucede con los valores de la función en un entorno del punto.

- Otro motivo podría ser la necesidad de encontrar la velocidad instantánea de un móvil, lo que implica encontrar la derivada de una función, tema que estudiaremos en el siguiente capítulo e involucra el concepto de límites.

Algo muy importante para tener en cuenta: siempre que hablemos de límites estudiaremos qué sucede en una cercanía de un valor de x conocido, digamos a pero *no* lo que pase en ese valor. Es decir, nos acercaremos lo más posible al valor a pero nunca llegará a interesarnos qué sucede en él (esto recién se analizará cuando estudiemos continuidad).

2.1.2. Notación y ejemplos sencillos

Si x se acerca al valor de a y los valores de la función se aproximan a cierto número, que llamaremos L, la notación que usaremos será la siguiente:

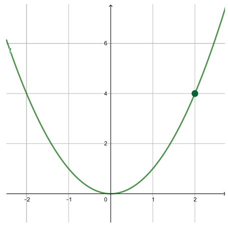
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Esto se lee: el límite de la función f, cuando x tiende al valor a, es L. En otras palabras, cuando x se acerque al valor a, los valores de la función se acercarán al número L.

Ejemplo 2.1. Tenemos la función $f(x) = x^2$, y queremos saber qué sucede cuando x se acerque al valor 2. Es decir, queremos analizar el siguiente límite $\lim_{x\to 2} x^2$. Si miramos el gráfico 2.1b de esta función, observamos que los valores de la función se acercan a 4. Como dijimos que no nos interesa saber qué sucede justo en el punto, evaluaremos la función en valores cercanos a 2. Para esto armamos una tabla de valores (ver tabla 2.1a en gráfico 2.1), en donde utilizaremos valores un poco más chicos que 2, y un poco más grandes; más adelante, esta idea nos llevará

x	$f(x)$	diferencia
1,9	3,61	0,39
1,99	3,9601	0,0399
1,999	3,996001	0,003999
2,1	4,41	0,41
2,01	4,0401	0,0401
2,001	4,004001	0,004001

(a) Tabla de valores



(b) Análisis gráfico.

Figura 2.1: Análisis de la función $f : R \to R / f(x) = x^2$.

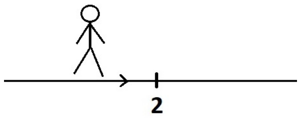
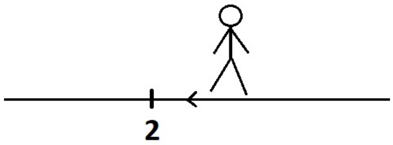


Figura 2.2: acercarse al valor 2 por el lado izquierdo



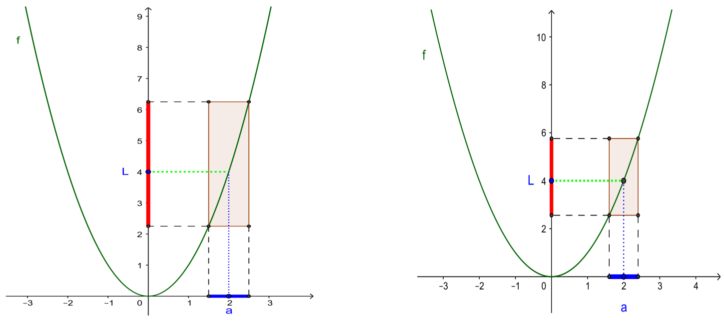
(a) acercarse a 2 por el lado derecho

Figura 2.3: límites laterales

al concepto de límites laterales. En los primeros tres valores nos acercamos al 2 con números un poco más chicos. Si lo vemos en la recta del dominio (ver gráfico 2.2) diremos que nos acercamos por el lado izquierdo o, directamente, *por izquierda*. En los siguientes tres valores nos acercamos al 2 con valores más grandes. Es decir, por el lado derecho (ver figura 2.3a) o *por derecha*. En ambos casos vemos que la función se acerca al valor 4, que era lo que esperábamos, y la distancia entre el valor de la función y el valor del límite es, cada vez, más chica.

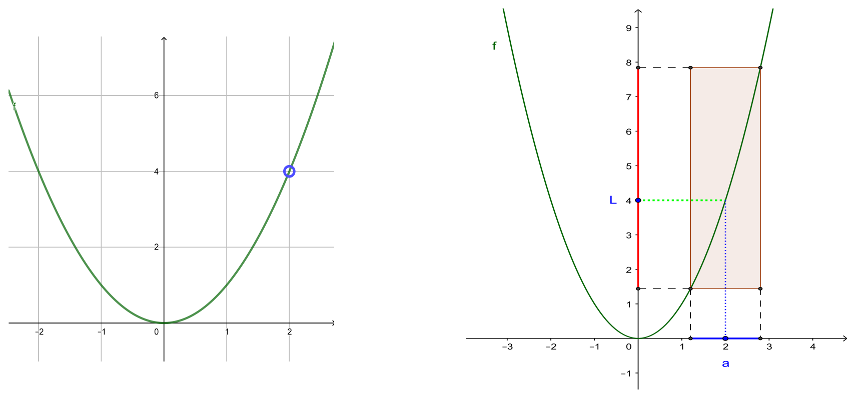
Nota: la diferencia entre el valor de la función y el valor 4, su límite, la tomamos en valores absolutos porque medimos la distancia que hay entre ellos.

El gráfico 2.4a nos ayuda a fijar estas ideas. Allí observamos que cuando x se acerca al valor 2, es decir, cuando hay una pequeña distancia a dicho valor (los valores de x están incluidos en el intervalo marcado sobre el eje x), los valores de la función caerán dentro del intervalo marcado sobre el eje y, el cual encierra a



(a) Noción general. (b) Variación intervalo sobre eje x.

Figura 2.4: Interpretación geométrica del concepto de límite.



(a) $f(x) = x^2$, con $x \neq 2$ (b) Interpretación geométrica

Figura 2.5: Análisis del límite de una función

4, que es su límite. Por otro lado, si se achicamos la distancia de x a 2, se puede observar en el gráfico 2.4b, que también se achica la distancia de $f(x)$ a 4.

Ejemplo 2.2. Veamos qué sucede con esta nueva función: $f(x) = x^2$, con $x \neq 2$. Es la misma función que vimos antes con la única diferencia que no está definida en $x = 2$. Es decir, su gráfico tendrá un "pequeño agujerito" en el punto $P = (2, 4)$. (Aunque los puntos no tienen dimensión podemos imaginar un punto vacío, ver gráfico 2.5a).

¿Cuál será el límite cuando x tienda a 2? Si miramos el gráfico 2.5b o si armamos la misma tabla de valores del ejemplo anterior, el límite también nos dará 4, sin importar que ese valor no exista en el conjunto imagen. Es decir, cuando x se acerque mucho al valor 2, la función lo hará al valor 4. Insistimos en que no debemos fijarnos qué sucede justo en el punto, sino en las cercanías de él.

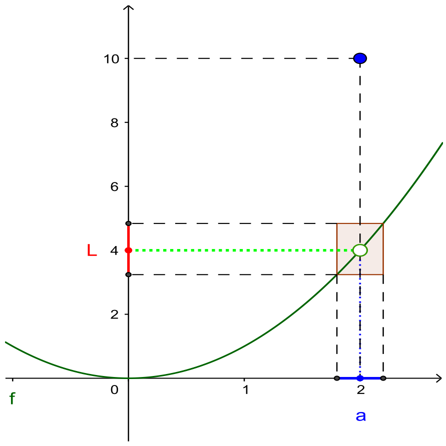


Figura 2.6: Análisis del límite de una función partida.

Ejemplo 2.3. Un ejemplo similar es el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \neq 2 \\ 10 & si\ x = 2 \end{cases}$$

Esta es una función de las que llamamos *partidas*. La única diferencia con el ejemplo anterior es que esta función sí está definida en el valor 2, sin embargo vale 10. En el gráfico 2.6, podemos observar el comportamiento, en donde vemos que en el punto de interés tiene un pequeño "salto". Nuevamente, subrayamos que lo que suceda justo en el punto, por ahora, no nos interesará. Cuando x se acerque al valor 2, la función se acercará a 4.

RESUMIENDO: en los tres ejemplos que vimos, el límite existe cuando x tiende a 2, y siempre vale 4, sin importar qué pasa con el valor de f en $x = 2$. El límite solo mira qué ocurre en las cercanías del valor de interés.

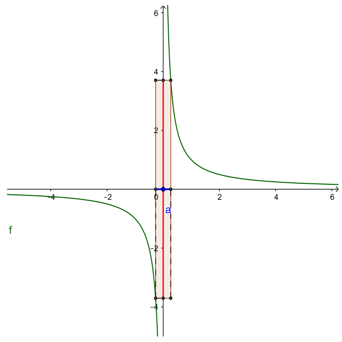
2.1.3. Ejemplos de la no existencia de límite

Ejemplo 2.4. Sea $f(x) = 1/x$. Esta función no está definida cuando x vale 0. Sin embargo, vimos que esto no es un problema para tomar límites. Entonces, nos podría interesar ver si existe el límite cuando x se acerque a dicho valor. Armamos la tabla 2.1a de valores para observar qué sucede. En los primeros cuatro valores, en los que nos acercamos al cero del lado izquierdo, vemos que la función toma valores cada vez más grandes con signo negativo. Por el contrario, cuando nos acercamos al cero del lado derecho la función toma valores cada vez más grandes con signo positivo. Es decir, no se acerca a un valor en particular, por lo que decimos que ese límite no existe.

Si observamos el gráfico 2.1b de la función, podemos ver que cuanto más chico

x	$f(x)$
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000

(a) Tabla de valores.



(b) Análisis gráfico de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Tabla 2.1: Análisis de la función $f : R - \{0\} \to R/f(x) = \frac{1}{x}$.

es el intervalo sobre el eje horizontal, que encierra al 0, más grande es el intervalo que abarca los valores de la función. Nos sucede al revés que en los ejemplos anteriores, en donde al achicar el intervalo en el dominio, se achicaba el intervalo de los valores de la función. Además, observamos lo que habíamos calculado en la tabla de valores: cuanto más cercano al valor 0 de x estemos, los valores de la función serán más grandes (en positivo o en negativo). En este caso vamos a decir que el límite nos da infinito (del lado izquierdo menos infinito y del derecho más infinito). Tenemos que tener presente que "infinito" no es un número, este límite no existe, pero nos será de utilidad cuando veamos asíntotas verticales.

Ejemplo 2.5. Veamos otro ejemplo. Analicemos qué pasa en las cercanías del valor 0 con la siguiente función

$$f : R - \{0\} \to R/f(x) = sen(1/x).$$

Esta función, tampoco está definida en $x = 0$, pero veamos cómo es el gráfico 2.7. Podemos observar que la imagen de la función está acotada entre -1 y 1. La función *seno* nunca puede devolver un valor mayor a 1, ni uno menor a -1. Es decir, la imagen no va a infinito como en el caso del ejemplo anterior, sin embargo, tampoco existe este límite. Debemos tener en cuenta que los valores de la función $f(x) = sen(x)$ se repiten cada 2π, por lo tanto, cuando x toma valores muy chicos en $f(x) = sen(1/x)$, estos ciclos de 2π se producen muy rápido. Hay que tener en cuenta que si $x = 1$, el ciclo de la función se repite cada 2π, en cambio si $x = 1/2$, el ciclo será cada π, etcétera. Es por esto que el gráfico de la función se asemeja a un resorte que está comprimido en el origen, porque estas "vueltas" las realiza cada vez en un lapso más pequeño. Como los valores de la función no se acercan a determinado número, decimos que no existe ese límite.

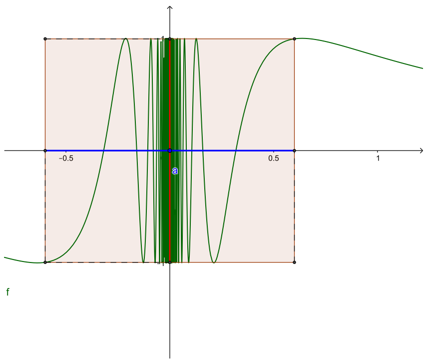


Figura 2.7: Análisis de $f : R - \{0\} \rightarrow R/f(x) = sen(1/x)$.

x	f(x)
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
2,1	5,8
2,01	5,98
2,001	5,998

Tabla 2.2: Función partida ejemplo 2.6.

Ejemplo 2.6. Un último ejemplo antes de pasar a la definición formal:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -2x + 10 & si\ x > 2 \end{cases}$$

La función está definida en todos los reales. Veamos qué sucede cuando hacemos tender la x al valor 2. Para eso armamos la tabla de valores, Tabla 2.2. Observamos que cuando x se acerca a 2 por el lado izquierdo, la fórmula que debemos mirar es la que está definida en la primera línea, la que nos da valores cercanos a 4. Por el contrario, cuando x tiende a 2 por el lado derecho, debemos mirar la fórmula de la segunda línea. Con esta fórmula los valores de la imagen se acercan a 6. Por lo tanto, como la imagen no se acerca a un único valor, este límite no existe. Lo corroboramos mirando el gráfico 2.8:

2.1.4. Límite en un punto: definición formal

Después de haber visto distintos ejemplos, estamos preparados para la definición formal de límite en un punto.

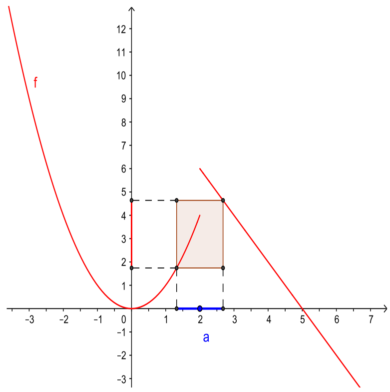


Figura 2.8: Análisis del límite de una función partida.

> **Definición 2.1.** Sea una función f y un intervalo abierto I que incluye al valor a, si f está definida en I o en $I - \{a\}$, afirmamos que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ sí y solo sí, para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que,
> $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Comprender esta definición no es fácil. En lenguaje coloquial significa lo siguiente:

- Tanto ε (épsilon) como δ (delta) son números reales positivos. La idea es que ambos sean muy pequeños, tanto como uno quiera.
- La definición nos dice que siempre que x esté muy cerca del valor de a (en símbolos $0 < |x - a| < \delta$), es decir, si la distancia que hay de algún valor de x al valor a es muy pequeña
- entonces los valores de la función estarán muy cerca de L, es decir, la distancia entre los valores de la función y su límite L será muy chica. En símbolos $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Algunos comentarios:

- El valor a puede o no pertenecer al dominio de f.
- Los valores de x estarán muy cerca de a, esto se restringe al pedir que el valor absoluto de la resta sea menor que delta, el cual dijimos que es un número positivo pequeño; pero x nunca valdrá a. Si así fuera, la resta nos daría 0, sin embargo pedimos que sea mayor estricto que 0.
- La restricción anterior no se pide en la expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$ ya que $f(x)$ podría valer L.

Otra forma de plantear la definición de límite

Podemos pensar la definición de límite de otra manera, pero para eso antes necesitamos definir dos conceptos muy parecidos.

- **Entorno de un punto.** Cualquier intervalo abierto que contenga a un punto a como su punto medio será un entorno de a, y se escribirá $E(a)$. La distancia del valor a hasta el borde del intervalo será el radio al que llamaremos r, por lo que dicho intervalo será $(a-r, a+r)$. Esto quiere decir que el intervalo estará formado por todos los valores reales x que cumplen $a-r < x < a+r$. De acuerdo a esto, la expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$ podemos pensarla como un entorno del valor L con radio ε, dado que $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$, por definición de módulo y despejando convenientemente, queda

$$f(x) - \varepsilon < L < f(x) + \varepsilon$$

- **Entorno reducido.** Un entorno reducido de un punto es un entorno que no incluye al punto en cuestión. Su notación es $E^*(a)$. Es decir, si r es el radio de un entorno reducido, el intervalo será $(a-r, a+r) - \{a\}$. Por lo tanto, la expresión $0 < |x-a| < \delta$ la podemos pensar como un entorno reducido del punto a.

Con los dos conceptos anteriores afirmamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para todo $E(L)$ existe cierto $E^*(a)$ tal que $f(x) \,\epsilon\, E(L)$ siempre que $x \,\epsilon\, E^*(a)$.

La idea es la misma que explicamos anteriormente: los valores de la función estarán cerca de su límite, es decir, pertenecerán al entorno de L cuando los valores de x estén cercanos al valor a, o sea, pertenecerán al otro entorno.

Ejemplo 2.7. Comencemos aplicando la definición a un ejemplo bien sencillo.

$$f(x) = x$$

Queremos ver qué sucede cuando x tiende a, por ejemplo, 3. Si calculamos el límite gráficamente, podremos ver que el límite da 3. Sin embargo, buscamos aplicar la definición. Entonces, si $0 < |x-a| < \delta$, debería suceder que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como a y L valen 3, nos queda:

$$\text{si } 0 < |x-3| < \delta \text{ entonces, debería suceder que } |x-3| < \varepsilon.$$

Vemos que el módulo que está al principio de la proposición tiene la misma expresión que el módulo que está al final, por lo que la proposición anterior será verdadera siempre y cuando $\delta \leq \varepsilon$. Por lo tanto, si alguien elige, por ejemplo,

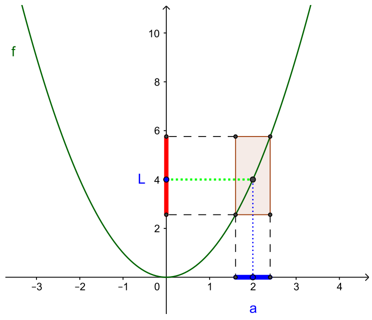


Figura 2.9: Límite de la función identidad: a cierto δ le corresponde un mismo ε

$\varepsilon = 0{,}1$ alcanzará con elegir $\delta = 0{,}1$ o cualquier otro número positivo menor para que cumpla lo pedido. Y si se elige $\varepsilon = 0{,}001$, nos alcanzará con elegir $\delta = 0{,}001$ o cualquier otro número menor.

Ejemplo 2.8. Si la función fuera $f(x) = 2x + 5$ y quisiéramos demostrar que el límite cuando x tiende a 3 es 11, no es tan sencillo como en el caso anterior.

¿Qué sucedería si eligiéramos $\delta = \epsilon$? Tratemos de comprobarlo eligiendo 0,11 para ambas. Entonces, decimos que si $0 < |x - 3| < 0,11$ se debe cumplir que $|f(x) - 11| < 0{,}11$. Si elegimos $x = 3,1$ las siguientes dos desigualdades se cumplen: $0 < |3{,}1 - 3| = 0{,}1 < 0,11$, por lo tanto, el valor de x pertenece al entorno reducido del valor 3. Cuando hacemos los cálculos en en la segunda parte de la proposición:

$$|f(x) - L| = |2x + 5 - 11| = |2 \cdot 3,1 + 5 - 11| = |6,2 - 6| = |0,2| = 0,2$$

que no es menor que $0,11$. Entonces, ¿cómo se halla el valor de δ? Se busca al revés: partiendo del final de la proposición, así δ queda dependiendo de ϵ. Por lo tanto, planteamos:

$$|f(x) - L| = |2x + 5 - 11| = |2x - 6| < \epsilon$$

En la expresión debemos buscar que nos aparezca $|x - 3|$ para poder relacionarlo con la expresión del antecedente y conseguir acotarla. Si sacamos factor común 2 y aplicamos propiedades del módulo, nos queda:

$$|2x - 6| = |2(x - 3)| = |2||x - 3| = 2|x - 3| < \varepsilon$$

Pero $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $2|x - 3| < 2\delta \leq \epsilon$. De esta forma, podemos tomar $\delta \leq \epsilon/2$ y así reconstruir la proposición entera. En el gráfico 2.10 vemos que la longitud del segmento ϵ es el doble de la longitud del segmento δ.

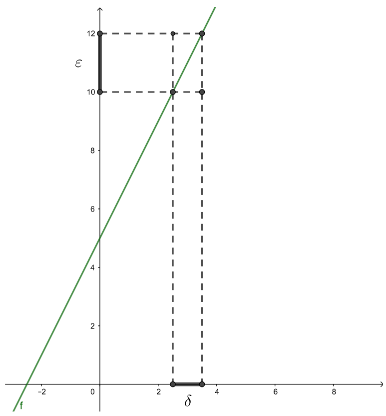


Figura 2.10: La función lineal $f(x) = 2x + 5$, vemos que la longitud de δ es la mitad de ϵ

Ejemplo 2.9. Si queremos demostrar, formalmente, que el límite del ejemplo 2.1 es válido debemos probar que se cumple la proposición de la definición. Para esto necesitamos encontrar las restricciones del valor delta como hicimos en el caso anterior. Decimos que:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4,$$

equivale a decir que: si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Al igual que antes, empezaremos por la última condición así delta nos queda en función de épsilon. Debemos buscar que nos aparezca la expresión $x - a$, dentro de la expresión $f(x) - L$, para poder acotarla. De esta forma,

$$|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| < \varepsilon$$

Por propiedad de módulos

$$|(x + 2)(x - 2)| = |x + 2||x - 2| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Pero sabemos que $0 < |x - 2| < \delta$, ya que es nuestra hipótesis. El problema lo tenemos con el $x + 2$ porque no hay una restricción para esta expresión, por lo que a priori no podríamos encontrar alguna relación entre δ y ε. Pero si pensamos que x estará cerca del valor 2, podríamos pedir que x no se aleje en más de una unidad del valor 2 (si hubiéramos elegido 2, 3 o 20 unidades no cambia demasiado). Que diste del 2 a lo sumo en una unidad significa que x estará en el intervalo $(1, 3) - \{2\}$. Por lo tanto, podemos plantear que: $3 \leq |x + 2| \leq 5$.

Ahora volvemos a la desigualdad 2.1, como buscamos acotar, pondremos el valor máximo:

$$|x + 2||x - 2| < 5\delta \leq \varepsilon$$

Nota: el 5 surge del factor $|x+2|$, y el δ por $|x-2|$.

Por lo tanto, pedimos que $5\delta \leq \varepsilon$, es decir $\delta \leq \varepsilon/5$. Como vemos, cuando épsilon es muy chico, también lo será delta.

Hagamos una comprobación con valores concretos, por ejemplo si queremos que el resultado difiera en menos de 1 de su límite, estamos pidiendo $\varepsilon = 1$, entonces, $\delta \leq 1/5 = 0,2$. Elegimos este valor $\delta = 0,2$. Quiere decir que x tiene que valer más de $1,8$ y menos de $2,2$, pero no 2. Veamos qué sucede con $x = 2,1$ que cumple lo pedido. Entonces, armamos la expresión:

$$|x-2| = |2,1-2| = |0,1| < 0{,}2$$

que cumple que es menor o igual que $1/5$. Ahora miremos si cumple la otra expresión:

$$|x^2-4| = |2,1^2-4| = 0,41 < \varepsilon = 1$$

que también cumple.

Lo que acabamos de hacer en el ejemplo es solo una comprobación. La demostración general de que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ se debe hacer para todo x y surge de reconstruir la proposición de la siguiente forma:

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ existe δ tal que $0 < \delta \leq \varepsilon/5$, ($\delta \leq \varepsilon/5$ hallado previamente) verifica que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L| = |x^2-4| = |x-2||x+2|$$

y, dado que pedimos que $3 < |x+2| < 5$:

$$|x-2||x+2| < 5\delta \leq 5\varepsilon/5 = \varepsilon$$

De esta forma queda demostrado que el límite de la función cuando x tiende a 2, es 4. □

Ejemplo 2.10. Vamos a probar que el límite de una función constante: $f(x) = k$, es siempre k. Es decir, queremos probar que $\lim\limits_{x\to a} k = k$ para todo k real y para todo valor de a.

Nota: si bien esta función es más sencilla que las que vimos en los dos ejemplos anteriores, en este caso estamos probando un límite para cualquier valor de a y no para un valor puntual.

En este caso δ es cualquier número positivo, porque para cualquier ε positivo y para cualquier δ positivo resulta que para todo $x \in Dom(f)$ se verifica que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces, $|f(x) - k| = |k-k| = 0 < \varepsilon$.

Ejemplo 2.11. ¿Qué sucede si queremos aplicar la definición a una función que no tiene límite? Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Sabemos que no tiene límite, pero supongamos que decimos que el límite es 0 (podríamos elegir 1, 5 o cualquier número). Por lo tanto,

$$\text{si } 0 < |x-0| = |x| < \delta, \text{ entonces } |1/x - 0| = |1/x| < \varepsilon.$$

Si dividimos todo por $\delta|x|$, como es un número positivo, queda:

$$0 < \frac{|x|}{|x|\delta} < \frac{\delta}{|x|\delta}$$

$$0 < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{|x|} = |1/x| < \varepsilon.$$

De donde decimos que $0 < \frac{1}{\delta} < \varepsilon$. En consecuencia, $\frac{1}{\varepsilon} < \delta$. Lo que significa que, cuanto más chico sea el épsilon que uno elija, más grande deberá ser el delta, por lo tanto el límite propuesto no es válido. Por ejemplo, elegimos $\varepsilon = 0,1$. Entonces, δ tiene que ser más grande que $1/0,1 = 10$. Elegimos $\delta = 11$. Estamos diciendo que, $0 < |x| < \delta = 11$

Ahora supongamos que x vale 5, como 5 es menor que 11, cumple la primera condición. Pero $1/5 = 0,2$ no es menor a $0,1$, que es el valor de ε, por lo tanto, la proposición es falsa, lo que quiere decir que el límite no vale cero.

Acabamos de probar que el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ es distinto de cero, pero habría que probar que tampoco se cumple con ningún otro número, es decir, deberíamos plantear un valor de L genérico y trabajar con eso. Lo haremos con una función similar luego de expresar la siguiente definición.

Definición 2.2. Decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si existe un número M, arbitrariamente grande, tal que para cierto δ, que depende de M, se cumple que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x-a| < \delta$.

Pensándolo con respecto a entornos, esta definición nos dice que cuando x está muy cerca del valor a, es decir, cuando pertenece a un entorno de dicho valor, los valores de la función son mayores que cierto valor M, es decir, $f(x) \epsilon (M, +\infty)$.

Ejemplo 2.12. Sea $f(x) = 1/x^2$, queremos verificar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Si tomamos un valor de $M = 10000$, alcanzará con que $\delta = 1/100$, dado que si se cumple $0 < |x-0| < 100$, entonces, $f(x) > 1/(1/100)^2 = 10000$. Esto lo podemos generalizar para cualquier valor de M, haciendo que $\delta = \sqrt{M}$.

La definición anterior la podemos plantear también con infinito negativo: decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si existe un número M, arbitrariamente grande, tal que para cierto δ, que depende de M, se cumple que $f(x) < -M$ siempre que $0 < |x-a| < \delta$.

En el ejemplo 2.11 tenemos que cuando x se acerca al valor 0 por el lado derecho el límite nos da infinito positivo, en cambio, cuando lo hace por el lado izquierdo, cumple con la definición de infinito negativo. Esto nos lleva a referirnos a límites laterales que lo haremos más adelante.

2.1.5. Álgebra de límites

Si bien debemos conocer y manejar la definición de límite, cuando calculemos límites lo haremos utilizando propiedades. En general nos vamos a basar en el álgebra de límites. Vamos a partir de algunos resultados que ya fueron probados para generalizarlos. Por ejemplo, si $f(x) = x$ es trivial demostrar que $\lim\limits_{x\to a} x = a$, si tomamos $\delta = \varepsilon$ se cumple la definición. Esta afirmación la vamos a utilizar más adelante en casos más complejos.

Proposición 2.1. ***Suma (o resta) de funciones.*** Sean las funciones f, g y $h = f \pm g$, tales que existen los límites de f y g cuando x tiende al valor a, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Entonces, existe $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ y

$$\lim_{x\to a} h(x) = L_1 \pm L_2.$$

Nota: en general, esta propiedad se utiliza en forma inversa: se tiene una función que es suma de otras dos, y se calculan los límites por separado para hallar el límite general. Una sutileza que hay que mencionar es que, para poder separar el límite como la suma de dos límites, cada uno debe existir. Lo mismo sucede con la resta

Proposición 2.2. ***Producto de funciones.*** Sean las funciones f , g y $h = f \cdot g$, tales que existen los límites de f y g cuando x tiende al valor a, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Entonces, existe $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ y

$$\lim_{x\to a} h(x) = L_1 \cdot L_2.$$

En general, al igual que la propiedad de la suma o resta, esta propiedad se utiliza en forma inversa: se tiene una función que es producto de otras dos, y se calculan los límites por separado para hallar el límite general.

Algo que se desprende de la propiedad anterior es que $\lim\limits_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, siendo k una constante, dado que hemos visto que $\lim\limits_{x\to a} k = k$.

Ejemplo 2.13. Ahora bien, utilizando las dos proposiciones anteriores y el hecho de que $\underset{x\to a}{lim} x = a$ y $\underset{x\to a}{lim} k = k$ probaremos que $\underset{x\to 2}{lim} x^3 + 5x = 18$.

$$\underset{x\to 2}{lim} x^3 + 5x = \underset{x\to 2}{lim}(x.x.x + 5.x)$$

Como cada límite existe, nos queda:

$$\begin{aligned}\underset{x\to 2}{lim} f(x) &= \underset{x\to 2}{lim} x \, \underset{x\to 2}{lim} x \, \underset{x\to 2}{lim} x \; + \; \underset{x\to 2}{lim} 5 \, \underset{x\to 2}{lim} x \\ &= 2\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot 2 = 8 + 10 = 18\end{aligned}$$

Este resultado queda demostrado sin necesidad de comprobarlo con la definición. Por supuesto que lo que uno hace es reemplazar el valor en la función, y nos da el resultado del límite. Pero, en forma indirecta, está aplicando las propie dades que vimos.

Proposición 2.3. ***División de funciones.*** Sean las funciones f, g y $h = \frac{f}{g}$ tales que existen los límites cuando x tiende al valor a, es decir, $\underset{x\to a}{lim} f(x) = L_1$ y $\underset{x\to a}{lim} g(x) = L_2$ con $L_2 \neq 0$. Entonces, existe $\underset{x\to a}{lim} h(x)$ y

$$\underset{x\to a}{lim} h(x) = \frac{L_1}{L_2}.$$

Proposición 2.4. ***Funciones exponenciales.*** Sean las funciones f, g y $h = f^g$tales que existen los límites cuando x tiende al valor a, es decir,$\underset{x\to a}{lim} f(x) = L_1$ y $\underset{x\to a}{lim} g(x) = L_2$ con $L_1 > 0$. Entonces, existe $\underset{x\to a}{lim} h(x)$ y

$$\underset{x\to a}{lim} h(x) = L_1^{L_2}.$$

Proposición 2.5. ***Función logarítmica.*** Una propiedad importante que utilizaremos en varios casos es la siguiente, $\underset{x\to a}{lim}(log_b(f(x))) = log_b(\underset{x\to a}{lim} f(x))$.

Proposición 2.6. ***Raíz de una función.*** $\underset{x\to a}{lim}(\sqrt{f(x)}) = \sqrt{\underset{x\to a}{lim} f(x)}$.

Esta propiedad es un caso particular de la Propiedad 2.4. En este caso, la función g es constante: $g(x) = \frac{1}{2}$.

Observación. Las propiedades vistas hasta ahora se pueden extender para más de dos funciones y combinar de manera indistinta.

2.1.6. Casos determinados e indeterminados

Hay algunos casos en los que no podríamos aplicar las propiedades anteriores. Por ejemplo, la propiedad de la división exige que el límite del denominador sea distinto de cero. Retomando la función $f(x) = 1/x$, la podemos pensar como la división de dos funciones: la función constante, $g(x) = 1$ y la función identidad, $h(x) = x$. Sabemos que el límite de una función constante siempre es la misma constante, para cualquier valor que tienda x. En la función identidad, cuando x tiende a 0 nos da 0. Entonces, sería un error querer separar este límite en dos límites ya que la propiedad mencionada nos exige que el límite del denominador sea distinto de cero. Por este motivo no hacemos la separación en dos límites, sino que lo estudiamos en su conjunto.

Cuando intentamos realizar la división podríamos pensar que no podemos dividir por cero, sin embargo, no estamos dividiendo por el número 0 (esto es importante distinguir), estamos dividiendo por algo que es muy chico, es decir, se parece a 0 pero no lo es. Esta división nos da un número grande en valor absoluto. Por lo tanto, diremos que el límite tiende a infinito (por el momento no prestaremos atención a su signo). Debemos tener en cuenta que infinito no es un número, por lo tanto este límite no existe.

El que acabamos de analizar es un ejemplo de los casos que llamamos *determinados*. Les decimos así porque sin hacer ninguna operación auxiliar sabemos el resultado del límite.

Proposición 2.7. Sean las funciones f, g y h, donde $h = f/g$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ con $L \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, pero g no se anula en un intervalo abierto que contenga a a, entonces $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \infty$. Hay que tener en cuenta los signos del numerador y del denominador para saber si tiende a infinito positivo o negativo, y es probable que el signo del denominador cambie si se tiende al valor a por el lado izquierdo o por el lado derecho.

Ejemplo 2.14. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$. Podremos decir que este límite tiende a infinito, ya que la función del numerador tiende a 3, y la del denominador a 0. Luego, habrá que analizar si es infinito positivo o negativo, para eso tendremos que ver si nos acercamos a 2 por el lado derecho o por el lado izquierdo, con la finalidad de ver si lo que tiende a 0 lo hace con un signo positivo o negativo (lo que tiende a 3, siempre es positivo).

Ejemplo 2.15. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$. Esta función es la misma del ejemplo anterior, pero cuando x tiende a -1, nos queda que tanto la función en el denominador como la del numerador tienden a 0. En este caso no sabremos el resultado de antemano si no hacemos alguna otra operación. Cuando sucede esto en principio decimos que el límite es *indeterminado*, porque a priori no sabemos el resultado. Vamos a ver varios tipos de indeterminaciones, este caso, el de “0/0”, es una de ellas.

2.1.7. Límites laterales

Hemos visto que a un punto de acumulación del dominio nos podemos acercar con valores un poco más chicos o un poco más grandes siempre que el dominio de la función lo permita. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x}$, al valor $x = 0$ nos podremos acercar con valores de x más chicos, como $-0,1$ o $-0,01$, o con valores de x un poco más grandes, como $0,1$ o $0,01$. Debemos recordar que x jamás tomará el valor al cual se acerca. En el primer caso decimos que nos acercamos por el lado izquierdo y, en el segundo, por el lado derecho. La notación será $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, respectivamente. A estos límites los llamamos *límites laterales*. Para que el límite exista, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, los límites laterales deben coincidir. Veamos algunos ejemplos para ilustrar estas ideas.

Ejemplo 2.16. Si tenemos la siguiente función partida (la hemos analizado en el Ejemplo 2.6):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -2x + 10 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Podemos observar que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -2x + 10 = 6$$

Entonces, como los límite son distintos, esto significa que no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Es decir, existen ambos límites laterales cuando x se acerca al valor 2, sin embargo, el límite general no, ya que los valores no coinciden.

Ejemplo 2.17. Analicemos el limite de la siguiente función en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Podemos observar que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$$

Es decir, el límite por izquierda del valor 0 existe, y vale 0. En cambio, el límite por derecha no existe, ya que tiende a infinito. Por lo tanto, el límite general tampoco existe.

Ejemplo 2.18. Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$. En este ejemplo no es razonable pedir la existencia de ambos límites laterales cuando x tiende a 0 porque la función no está definida para valores negativos ya que el $Domf = [0, +\infty)$. Entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

El único límite lateral que tiene sentido estudiar es el del lado derecho, en este caso el límite general existe. Por eso, al principio de la sección, resaltamos que debemos analizar el limite en puntos de acumulación del dominio de la función.

2.1.8. Definición de límites laterales

Anteriormente hemos dado la definición de límite, cuando x tiende a cierto valor. Formalizaremos el concepto de limite lateral.

> **Definición 2.3. Límite por derecha.** Sean f una función definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$, decimos que
>
> $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
>
> sí y solo sí, para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in I$ se verifica que
> si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Estamos agregando que x debe ser mayor al valor al cual tiende, por lo que no es necesario escribir el módulo de $x - a$ ya que siempre será positivo. Además, la expresión $0 < x - a < \delta$ es equivalente a $a < x < \delta + a$, donde es más notorio que x es un poco más grande que el valor a.

> **Definición 2.4. Limite a izquierda**. Sean f una función definida en un intervalo abierto $I = (c, a)$, decimos que
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
>
> sí y solo sí, para todo$\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in Domf$ y $x < a$ se verifica que
> si $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En este caso pedimos que x sea menor al valor de tendencia. Por lo tanto, al quitar el módulo, la resta se invierte para que nos dé un valor positivo, lo cual es equivalente a escribir $a - \delta < x < a$.

2.1.9. Algunos teoremas

Enunciaremos algunos teoremas que no demostraremos pero sí los utilizaremos en distintas ocasiones a lo largo del curso.

Teorema 2.1. Unicidad del límite. Sea una función definida en un conjunto D, que incluye al punto a. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$, entonces, $L = M$.

En otras palabras, lo que este teorema señala es que en cierto valor el límite de la función, si existe, debe ser único. Esto ya lo habíamos mencionado cuando hablamos de límites laterales. Para que exista el límite, los laterales deben coincidir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si bien la idea intuitiva de este teorema es simple, la demostración no es trivial, pudiéndose estudiar en la bibliografía recomendada.

Teorema 2.2. Función acotada en un entorno del punto. *Si una función tiene límite en un punto $x = a$ (la existencia de límite se refiere a límite finito), entonces, hay un entorno reducido de dicho punto, donde la función está acotada.*

Esto lo podemos ver si usamos la definición de limite. El $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que, cuando $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esta última expresión quiere decir que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Es lo que vimos de manera gráfica al principio del capítulo: cuando los valores de x están dentro de un intervalo en el eje de las abscisas, la imagen $y = f(x)$ queda dentro de un intervalo representado en el eje de las ordenadas. En consecuencia, podemos decir que está acotado.

Teorema 2.3. *Si $f(x) \leq g(x)$ en un intervalo I que incluye al valor a, y los límites de ambas funciones existen cuando x tiende al valor a, entonces:*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Una ampliación de este teorema es el que sigue, el cual lo usaremos para varias demostraciones.

Teorema 2.4. Compresión. *Si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

a. *f, g y h son tres funciones definidas en el mismo conjunto D, que incluye al punto a;*

b. $\forall x \epsilon D,\ x \neq a,\quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

c. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = L.$

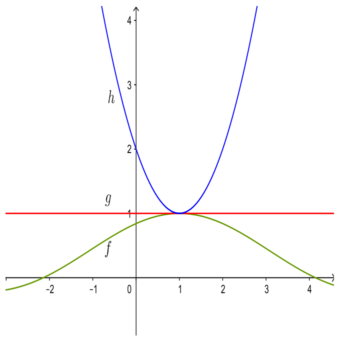


Figura 2.11: Propiedad del sándwich

$Entonces, \lim_{x \to a} g(x) = L. \lim_{x \to a} f(x) = L$

Este teorema se conoce como "la propiedad del sándwich". Lo aplicaremos para algunas demostraciones, en especial cuando conocemos el límite de dos funciones, en este caso f y h, y queremos estudiar una tercera: g. Sin embargo, lo único que sabemos de g es que es mayor o igual que f pero menor o igual que h. Y que los límites de f y h en cierto valor coinciden, entonces el límite de g, en dicho valor, será el mismo al de los otros dos. Veamos el gráfico 2.11. Observemos que g, la función desconocida, en un entorno de $x = 1$ verifica $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Además el límite tendiendo a 1 de h y f existe y es el mismo. Entonces, por este teorema, podemos asegurar que el límite de g tendiendo a 1 es el mismo que el de h y f.

2.1.10. Infinitésimo por acotado.

Se dice que f es un infinitesimo en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Entonces, si queremos calcular el $\lim_{x \to a} (f(x).g(x))$ sabiendo que $\lim_{x \to a} g(x) = k$, basta con utilizar la Propiedad 2.2del producto, obteniendo lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x) = 0.k = 0.$$

Sin embargo, hay casos en los que no podemos aplicar esta separación en los límites porque alguno de ellos podría no tenerlo. Por ejemplo, queremos calcular $\lim_{x \to 0} (x.sen(1/x))$. Anteriormente estudiamos que el $\lim_{x \to 0} sen(1/x)$ oscila de manera infinita en un entorno del cero. Entonces, en principio no podríamos decir que el resultado es el producto de los límites de cada factor, ya que el segundo, no tiene límite. Es decir, que estaríamos en el caso en donde $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ no existe. Si bien este segundo límite no existe, sabemos que está acotado entre -1 y 1, debido a que $-1 \leq sen(1/x) \leq 1$, para todo valor de x, excepto en 0. Recordemos que la imagen de la función *seno* es el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, no nos preocupará que ese límite no nos dé un número en concreto. Cualquier número entre -1 y 1, multiplicado por un infinitésimo, nos dará cero. Coloquialmente decimos "cero por acotado (o infinitésimo por acotado) da cero". Esto lo formalizamos en la siguiente proposición que utilizaremos en muchos casos:

Proposición 2.8. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ está acotado, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0.$$

2.2. Límite en el infinito

La idea de límite en el infinito es similar a la de un punto, nada más que ahora, x tenderá a infinito. ¿Qué quiere decir esto? Que x ya no se acerca a un número específico, sino que su valor absoluto es tan grande como uno quiera. Podemos pedir que x tienda a más infinito, o podemos pedir que x tienda a menos infinito. Por lo tanto, tenemos solo dos límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Por supuesto, ahora no tiene sentido querer aplicar la definición de límite porque, en lugar de $0 < |x-a| < \delta$, deberíamos indicar $0 < |x-\infty| < \delta$ o $0 < |x+\infty| < \delta$, lo cual no tiene sentido.

Sin embargo podemos decir que: si existe el límite L, cuando x tiende a infinito, sucede que, para cualquier ε, positivo, tan chico como uno desee, existe algún valor M, positivo, tal que si $x > M$, entonces, $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$. De igual manera, podríamos definir el límite cuando x tiende a menos infinito, pidiendo que x sea menor que M, un número negativo.

Observación. Se eligió M en lugar de δ, porque este último se asocia con valores pequeños.

2.3. Estudio de casos

Habíamos mencionado en el Ejemplo 2.15 un caso de indeterminación que era "cero sobre cero". Pero, ¿qué quiere decir esto? Cuando decimos "indeterminación cero sobre cero", en realidad, estamos diciendo "hay una indeterminación de algo que tiende a cero, dividido otra cosa que, también, tiende a cero". Es importante tener en cuenta que no hacemos *nunca* una división por cero. Y también es importante destacar que el numerador tiende a cero, pero no lo es, ya que si tuviéramos un numerador que vale cero, el resultado del límite será cero. Por ejemplo:

a.
$$\lim_{x \to 0} \frac{3(x-1)-3x+3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x-3-3x+3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

En este caso no tenemos ningún tipo de indeterminación. En cambio, en este otro ejemplo, sí:

b.
$$\lim_{x \to 0} \frac{3(x^2-1)-3x+3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2-3-3x+3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2-3x}{x}$$

Antes de ver cómo lo resolvemos, haremos hincapié con la notación.

Jamás debemos escribir lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2-3x}{x} = \frac{0}{0}$$

¿Por qué? Porque estamos diciendo que el resultado del límite surge de dividir 0 por 0. La notación correcta se indica mediante flechas que señalan la tendencia, de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{3x^2-3x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$

Luego de indicar la indeterminación, debemos resolver el límite y no expresar que no sabemos cuál es su valor ya que es indeterminado. Pero primero tenemos que saber cuándo hay y cuándo no hay una indeterminación.

Algunos casos determinados

Sin importar a qué valor tienda x, se cumplirán las siguientes reglas:

- si tenemos una división entre una función que tiende a un número cualquiera a excepción del cero y otra que tiende a cero, el resultado del limite es infinito (puede ser positivo o negativo, dependiendo de los signos de las expresiones);
- si tenemos una división entre una función que tiende a cero y otra que tiende a un número cualquiera a excepción del cero, el resultado del limite es cero.

Indeterminaciones

Analicemos qué sucede cuando tenemos una división de dos funciones que tienden ambas a cero. Para este caso no tenemos una regla genérica, porque no sabemos cuál de las dos tiene "más fuerza", por decirlo de alguna manera.

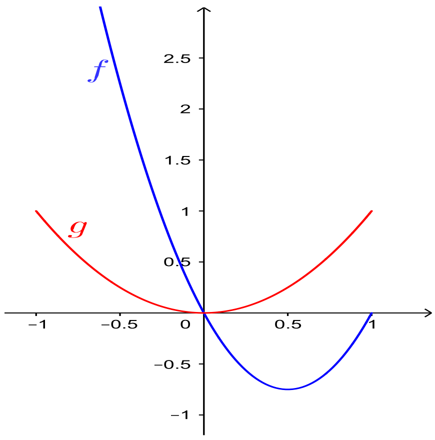


Figura 2.12: $f : R \to R/f(x) = 3x^2 - 3x$ y $f : R \to R/g(x) = x^2$

Caso 1. Si la función del denominador tiende a cero "mucho más rápido" que la del numerador, el resultado tenderá a infinito (puede ser positivo o negativo).

Caso 2. Si la función del numerador se acerca "más rápido" al cero que la del denominador, este límite nos dará cero.

Caso 3. Podría suceder que ambas funciones tiendan al cero de "manera similar", en estos casos nos dará un número.

En el ejemplo anterior que había quedado pendiente, si factoreamos y simplificamos, queda:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x(x-1)}{x} = \lim_{x \to 0} 3(x-1) = -3$$

Estamos en presencia del Caso 3. Sin embargo, si en el denominador tuviéramos x^2, nos quedaría:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x(x-1)}{x^2} = \lim_{x \to 0^{\mp}} \frac{3(x-1)}{x} = \pm\infty.$$

El resultado es positivo o negativo dependiendo del signo de la x, ya que el numerador tiende a -3 luego de simplificar. Lo que sucede, esta vez, es que el denominador se acerca más rápido al cero que el numerador. Podemos verlo en un gráfico, dibujando ambas cuadráticas cerca de $x = 0$. La función g se mantiene cerca del valor cero cuando x es muy chica, en cambio, la función f se aleja "más rápido" del cero.

2.3.1. Tipos de indeterminaciones

Analizaremos diferentes tipos de indeterminaciones. Y aprenderemos a "esquivarlas" (en general se utiliza el vocablo "salvar") según las diferentes combinaciones de expresiones. Las distintas estrategias para salvar las indeterminaciones, o para librarnos de ellas, dependen de cada caso. Para analizarlas de alguna forma ordenada, las clasificaremos en:

a. Divisiones

- **Cociente de infinitésimos.** Vimos que la división de dos funciones que tienden a cero es una indeterminación. Una aclaración: no siempre esas divisiones van a estar formadas por polinomios, podríamos tener raíces, trigonométricas, etc.
- **Cociente entre dos funciones que tienden a infinito.** Lo mismo sucede cuando el numerador y el denominador tienden a infinito (sin importar los signos). ¿Cuál de los dos crecerá más rápido? Si lo hace el numerador, el resultado será infinito. Si fuera el denominador, será cero. Si el crecimiento (podría ser decrecimiento) es parejo, nos dará algún número distinto de cero.

b. Productos

- **Producto entre un infinitésimo y una expresión que tiende a infinito.** Una indeterminación que no se detecta tan fácilmente es el producto entre dos factores en el que uno tiende a infinito y el otro tiende a cero. Siempre nos preguntamos lo mismo: ¿qué factor tiene más relevancia? ¿El que tiende a infinito o el que tiende a cero? Más adelante veremos algún ejemplo que ilustre esta indeterminación.

c. Sumas (o restas)

- **Sumas de dos expresiones que tienden a infinito pero con signos diferentes.** Si tomamos un límite de algo que tiene dos términos que se están sumando, y los analizamos por separado y ambos tienden a infinito nos puede pasar que:
  - tanto el primer término, como el segundo, tiendan a infinito positivo. Si bien no podríamos aplicar el álgebra de límites ya que los valores infinitos nos indican que esos límites no existen, se puede pensar que la suma de dos números muy grandes, nos dará un tercero aún más grande. En este caso no decimos que el límite es dos veces infinito, sino solo infinito (positivo).

- tanto el primer término como el segundo, tiendan a infinito negativo. Estamos en un caso similar al anterior, pero con signo negativo. Por lo tanto, el límite de la suma nos dará menos infinito.
- ambos tienden a infinito pero, uno con signo positivo y otro, con signo negativo. Nuevamente estamos en un caso de indeterminación, ya que no conocemos, a priori, cómo se comportan.

d. Exponenciales

- **Expresión exponencial en donde la base tiende a uno y el exponente a infinito.** Si la base de una exponencial, es mayor a uno, cuando el exponente sea muy grande (positivo), tenderá a infinito, esto lo indicamos: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, si $a > 1$. Si la base está entre cero y uno (recordemos que no puede ser cero, ni negativa), el resultado tenderá a cero. Por ejemplo: $1/2$ a la 2, es $1/4$; a la 3, es $1/8$; etc. Esto se indica: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, si $0 < a < 1$. Si la base es 1, el resultado siempre será 1. El problema lo tenemos cuando la base tiende a 1 y la expresión del exponente lo hace a infinito. En este caso es una indeterminación ya que no sabemos si tiende a cero, infinito, a uno, o a otro número cualquiera.
- **Expresión exponencial en donde la base tiende a infinito y el exponente es un infinitésimo.** Un número elevado a la cero da 1. Pero, si ese número (la base) tiende a infinito y el exponente tiende a cero, tenemos una nueva indeterminación.
- **Expresión exponencial en donde tanto la base como el exponente son infinitésimos.** Esta indeterminación es más difícil de ver y comprender, la analizaremos en otro capítulo cuando veamos la Regla de L'hopital.

Nota. Muchas veces nos encontraremos con una combinación de varias indeterminaciones. O, para salvar cierta indeterminación, pasaremos a otra.

2.3.2. Casos variados

En esta sección haremos varios ejemplos, con su respectiva explicación. Límites es un tema que se aprende haciendo muchos ejercicios. Aquí resolveremos algunos.

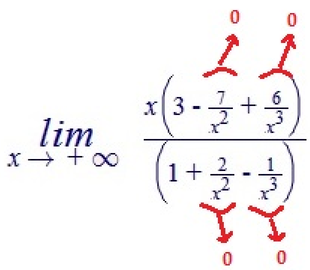
Ejemplo 2.19. Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^4-7x^2+6x}{x^3+2x-1}$. Este es un límite que tiene la forma de "infinito sobre infinito". El numerador, cuando x es muy grande, tiende a infinito. Es cierto que tenemos una resta con $7x^2$ pero, al lado de $3x^4$ será despreciable. Pensemos si x vale, por ejemplo, mil millones. El grado 4 hará un número con 36 ceros. En cambio, el grado 2, tendrá 18. Por supuesto que es un número muy grande, pero pierde su peso al lado de la otra cifra.Entonces, podemos pensar (solo pensar, no escribirlo) que la expresión $\frac{3x^4-7x^2+6x}{x^3+2x-1}$ será parecida a $\frac{3x^4}{x^3} = 3x$ cuando x sea muy grande. Lo cual nos daría infinito positivo.

¿Cómo lo escribimos correctamente? Nuestra tarea, en todas las indeterminaciones que veremos, será buscar alguna expresión distinta que indique lo mismo. Es decir, equivalente a la expresión original, de lo contrario no estaríamos analizando lo que nos piden, sino otra cosa. Por ejemplo, sabemos que $\sqrt{4} = cos(\pi) + 3 = \frac{10}{5}$ son todas expresiones distintas del número 2. La idea es hacer lo mismo con los expresiones cuyos límites nos dan indeterminados: llevarlos a alguna forma en donde la indeterminación desaparezca.

¿Cuál va a ser la estrategia? Sacamos la x de mayor grado como factor común, tanto en el numerador como en el denominador. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-7x^2+6x}{x^3+2x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(\frac{3x^4}{x^4} - \frac{7x^2}{x^4} + \frac{6x}{x^4}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(3 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

En el primer paso, sacamos x^4 en el numerador como factor común, esto significa que dividimos cada término por la x^4 que sacamos. Lo mismo hacemos en el denominador con x^3. Luego, simplificamos dentro de los paréntesis. Finalmente, fuera de los paréntesis, hasta llegar a la expresión (2.2). Dentro de los paréntesis, todos los términos que quedaron con x en el denominador, tienden a 0, porque son números (constantes) que están divididos por valores muy grandes:



De esta forma, el numerador tenderá a infinito positivo, ya que queda 3 multiplicado por x, donde x es un número muy grande. Y el denominador tenderá a 1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = +\infty$, que era lo que suponíamos desde el principio.

Ejemplo 2.20. Otro ejemplo de un mismo tipo de indeterminación, pero trabajando con raíces. Supongamos que queremos calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2x}-5}{x^2+x-1}$. Nuevamente, podemos pensar que el término más importante del numerador es el x^3 , pero hay que tener cuidado porque está dentro de una raíz. Por lo tanto, el x^3 quedará elevado a la $1/2$; de donde será $x^{3/2}$. Como en el denominador tenemos un término cuadrático, que es mayor a $3/2 = 1,5$; el resultado del límite nos dará cero. Veamos cómo trabajamos la expresión con otras equivalentes. Será similar a lo que hicimos en el ejemplo anterior, pero en dos pasos: primero dentro de la raíz y, luego, de manera global.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2x}-5}{x^2+x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3\left(1+2/x^2\right)}-5}{x^2+x-1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}\sqrt{1+2/x^2}-5}{x^2+x-1}\end{aligned}$$

En la última igualdad aplicamos propiedades de raíces, teniendo en cuenta que son factores positivos. Volvemos a sacar factores comunes y nos queda:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}\sqrt{1+2/x^2}-5}{x^2+x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}\left(\sqrt{1+2/x^2}-5/x^{3/2}\right)}{x^2\left(1+1/x-1/x^2\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+2/x^2}-5/x^{3/2}\right)}{x^{1/2}\left(1+1/x-1/x^2\right)}\end{aligned}$$

Por último, simplificamos y nos queda que el numerador tiende a 1, ya que -al igual que en el ejemplo anterior- todos los términos con x en el denominador, tenderán a 0; y la raíz de 1 es 1. En el denominador también tendremos un 1 pero que se multiplica por $x^{1/2}$ que, cuando x es muy grande, tenderá a infinito. Por lo tanto, el resultado tiende a cero, ya que nos queda un número sobre algo que tiende a infinito. Lo escribimos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\overbrace{\sqrt{1+2/x^2}}^{\to 1}-\overbrace{5/x^{3/2}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{x^{1/2}}_{\to\infty}\left(1+\underbrace{1/x}_{\to 0}-\underbrace{1/x^2}_{\to 0}\right)} = 0.$$

Ejemplo 2.21. Indeterminación tipo "Infinito a la cero". Ahora vamos a ver otro tipo de indeterminación que manejaremos de forma similar:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2x]{5^x+7^x}.$$

Este límite lo podemos escribir como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5^x+7^x\right)^{1/2x}$, donde vemos que la base tiende a infinito y el exponente a cero. Como hay una suma, no podemos distribuir el exponente. En consecuencia, sacamos el término mayor como factor común, es decir, sacamos como factor común 7^x, y nos queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left[7^x\left(\frac{5^x}{7^x}+1\right)\right]^{1/2x} &= \lim_{x\to+\infty} \left[7^x\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)\right]^{1/2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} (7^x)^{1/2x}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)^{1/2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 7^{x/2x}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)^{1/2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 7^{1/2}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)^{1/2x}
\end{aligned}$$

El segundo factor tiende a 1 porque como$\frac{5}{7}$ es menor que 1, tenderá a cero cuando x sea grande (nótese que $\frac{5}{7}$ por sí mismo, cada vez nos da un número menor, por lo tanto, si le sumamos 1, nos queda algo que tiende a 1 en la base, elevado a algo que tiende a 0, nos da resultado 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} 7^{1/2}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)^{1/2x} &= \lim_{x\to+\infty} 7^{1/2} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x+1\right)^{1/2x}}_{\to 1} \\
&= \sqrt{7}\cdot 1 = \sqrt{7}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.22. Indeterminación tipo "infinito menos infinito". Analicemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+x-1}{x^2-5}-\frac{x^3+3x^2+6x}{x+3}\right).$$

En este límite tenemos varias indeterminaciones. Por empezar, cada término presenta una indeterminación del tipo "infinito" sobre "infinito". Hemos aprendido, por los ejemplos anteriores, que el primer término se comportará parecido a x^2; porque si sacamos como factor común los términos de mayor grado nos queda $\frac{x^4}{x^2}=x^2$. Y, el segundo término, también será similar a x^2 cuando x sea muy grande. Por lo tanto, cada término tiende a infinito positivo, y como los restamos, estamos en el caso de una indeterminación de infinito menos infinito. Antes de resolverlo correctamente vamos analizar errores que son muy comunes.

Advertencia: no nos sirve en este caso calcular los límites por separado ya que no existen y no salvamos la indeterminación. Un error común sería decir que en el primer término queda x^2, lo mismo que en el segundo, por lo tanto el límite da 0. Enseguida veremos que no es así.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+x-1}{x^2-5}-\frac{x^3+3x^2+6x}{x+3}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^4+x-1)(x+3)-(x^3+3x^2+6x)(x^2-5)}{(x^2-5)(x+3)}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^5+3x^4+x^2+3x-x-3)-(x^5-5x^3+3x^4-15x^2+6x^3-30x)}{(x^3+3x^2-5x-15)}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+3x^4+x^2+3x-x-3-x^5+5x^3-3x^4+15x^2-6x^3+30x}{x^3+3x^2-5x-15}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+16x^2+32x-3}{x^3+3x^2-5x-15}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(-1+16/x+32/x^2-3/x^3)}{x^3(1+3/x-5/x^2-15/x^3)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+16/x+32/x^2-3/x^3}{1+3/x-5/x^2-15/x^3}=-1
\end{aligned}$$

Como vemos, el resultado no es 0, sino -1.

Ejemplo 2.23. Multiplicación y división por el conjugado. Analicemos otro caso de indeterminación del tipo "infinito menos infinito". Supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right).$$

La expresión que está dentro de la raíz tiende a infinito positivo. Luego, se le resta la x que también tiende a infinito positivo. Si planteamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2(1-4/x+1/x^2)}-x\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{1-4/x+1/x^2}-x
\end{aligned}$$

Como la x es positiva, al simplificar la raíz con la potencia queda x:

$$=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1-4/x+1/x^2}-x=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-4/x+1/x^2}-1\right).$$

Si bien todos los razonamientos son válidos, lo hecho hasta el momento no nos sirve para calcular el límite ya que pasamos a otra indeterminación del tipo "infinito por infinitésimo". Por lo tanto, debemos elegir otro camino. Lo que haremos es lo que se llama "multiplicar y dividir por el conjugado". Si tenemos el siguiente binomio $a + b$, se llama "conjugado" al binomio $a - b$. ¿Por que haríamos esto? La idea es que desaparezca la raíz. Para lograr esto, necesitamos que quede elevada al cuadrado. Buscamos tener algo del tipo $a^2 - b^2$, donde a es el primer término que contiene a la raíz. Por lo tanto $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, en donde el primer miembro es una diferencia de cuadrado, por este motivo necesitamos multiplicar por el conjugado. Pero, al multiplicar por algo debemos dividir por lo mismo para no cambiar la expresión. Teniendo en cuenta que el conjugado de un binomio es el mismo binomio con el signo que los une cambiado, escribimos:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x\right) . \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x\right)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x\right)}
\end{aligned}
$$

y conseguimos la diferencia de cuadrados que buscábamos.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 - 4/x + 1/x^2\right)} + x}
\end{aligned}
$$

Luego, continuamos sacando factor común como en los ejemplos anteriores:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - 4/x + 1/x^2} + x} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-4 + 1/x\right)}{x\left(\sqrt{1 - 4/x + 1/x^2} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4 + 1/x}{\sqrt{1 - 4/x + 1/x^2} + 1} = \frac{-4}{1 + 1} = -2.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.24. Indeterminación del tipo división entre infinitésimos. Analicemos el ejemplo que nos había quedado sin resolver en el comienzo de la sección 2.3. Era calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$$

Tenemos una indeterminación del tipo "0 sobre 0". En estos casos no nos servirá sacar la x de mayor grado como factor común, ya que pasaremos a una indeterminación del tipo "infinito sobre infinito". Lo que nos conviene es factorizar las expresiones y buscar la forma de simplificar. Observemos que en el numerador tenemos una diferencia de cuadrados, y en el denominador, tenemos una cuadrática que, si buscamos las raíces, podremos escribirla en la forma factorizada. Entonces:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x-2)} \tag{2.3}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x-2)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \tag{2.4}$$

En (2.3) podemos simplificar los factores $x+1$ porque son distintos de 0: hay que tener en cuenta que la x tiende a -1 pero nunca lo es. En (2.4), si bien reemplazamos la x por -1, estamos utilizando el álgebra de límites con la división, ya que ambos límites, el del numerador y el del denominador, existen.

2.3.2.1. El número e

El número e lo podemos definir como

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7183.$$

Utilizamos n en lugar de x porque son números naturales. De todas formas, con los números reales llegamos al mismo valor. Debemos tener en cuenta que los naturales son un subconjunto de los reales. Más aún, podemos escribir el número e en términos de una función g que cumple que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e \tag{2.5}$$

Observemos que la base tiende a 1, ya que el limite de g tiende a infinito, y el exponente tiende a infinito. Entonces, vamos a usar la igualdad 2.5 para salvar indeterminaciones del tipo "uno elevado a la infinito"

Ejemplo 2.25. Indeterminación del tipo "uno a la infinito". A partir de 2.5, podemos asegurar que $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2+x-3}\right)^{x^2+x-3} = e$, donde consideramos que $g(x) = x^2+x-3$.

> ⚠ Hay que tener cuidado porque lo que figure en el denominador debe ser exactamente igual al exponente.

Ejemplo 2.26. Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

Este límite, aunque nos quede algo que tiende a 1 elevado a una expresión que tiende a infinito, no nos dará el número e porque $5x$ no es lo mismo que $3x$.

¿Cómo averiguar, entonces, cuál es el valor del límite? El objetivo es lograr que nos quede lo mismo en el exponente que en el denominador. Por lo tanto, podemos multiplicar y dividir por 5. De esta forma nos queda:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x.\frac{5}{5}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x.\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

Por propiedad de límites,

$$\begin{aligned}&= \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{5}}\\ &= e^{\frac{3}{5}}.\end{aligned}$$

En el último al utilizar álgebra de límites, vemos el exponente por separado. En este sencillo ejemplo, el exponente es una constante, $\frac{3}{5}$, por lo que no presenta mayores inconvenientes.

Ejemplo 2.27. Misma indeterminación del ejemplo anterior pero con un caso más complejo. Analicemos el siguiente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{5x+4}$$

De la forma que está expresado, pareciera no estar relacionado con el número e. Si analizamos solo la base, tenemos una indeterminación del tipo "infinito sobre infinito". Sin embargo, ya tenemos experiencia en simplificar mentalmente una expresión de estas características, anticipando que la base se aproxima a $\frac{3x}{3x}=1$. Por otro lado, el exponente tiende a infinito. Conclusión: estamos frente a una indeterminación del tipo "uno a la infinito", por lo que debemos llevarlo a la forma indicada antes: $\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}$ con $g(x)$ tendiendo a infinito cuando x también lo hace.

En primer lugar, necesitamos el 1 sumando, por lo que se lo agregamos, pero, para no cambiar la expresión, debemos restarlo. Lo hacemos al final.

$$\begin{aligned}\frac{3x-2}{3x+1} = 1+\frac{3x-2}{3x+1}-1 = 1+\frac{3x-2-(3x+1)}{3x+1}\\ = 1+\frac{3x-2-3x-1}{3x+1} = 1+\frac{-3}{3x+1}\end{aligned}$$

Esta expresión es similar a la que estamos buscando, pero en el numerador del segundo término debemos tener un 1. Por lo tanto, el -3 lo pasamos al denominador dividiendo, o sea, nos quedaría el denominador multiplicado por $-\frac{1}{3}$:

$$\frac{3x-2}{3x+1} = 1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{-3}}$$

De esta forma, en el denominador nos queda la función: $g(x) = \frac{3x+1}{-3}$ que tiende a menos infinito. Eso mismo debemos tenerlo en el exponente, por lo que lo agregamos pero con el cuidado de quitarlo inmediatamente. Por lo tanto, multiplicamos por la misma expresión pero invertida:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{-3}}\right)^{\frac{3x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{3x+1}.(5x+4)} = \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{-3}}\right)^{\frac{3x+1}{-3}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{3x+1}.(5x+4)\right)}$$

Luego de aplicar la propiedad de la potencia y el álgebra de límites, observamos que el primer limite nos da el número e. Nos resta analizar qué sucede con el exponente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{3x+1}.(5x+4)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-15x-12}{3x+1}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(-15-12/x)}{x(3+1/x)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(-15-12/x)}{(3+1/x)} = -\frac{15}{3} = -5
\end{aligned}$$

Entonces, el exponente de e es -5, en consecuencia el resultado del limite es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{5x+4} = e^{-5}.$$

Nota: fácilmente se puede comprobar con una calculadora, haciendo las cuentas en la expresión original con un número grande, por ejemplo $x = 100000$, debería darnos un valor similar a $e^{-5} \cong 0{,}0067379$.

Ejemplo 2.28. Uso del Teorema 2.4 del "Sandwich". Tenemos una función f que desconocemos, pero sabemos que

$$\sqrt{x+1} \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 11, \ \forall x \geq -1 \tag{2.6}$$

luego, queremos tomar el límite de esa función cuando x tiende a 3. Entonces, por

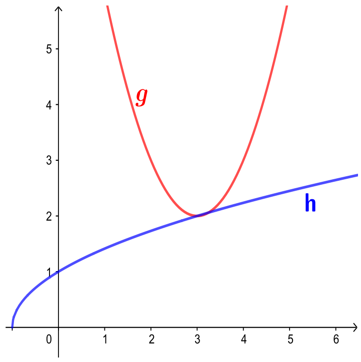


Figura 2.13: Curvas inferior y superior de la desigualdad (2.6)

Teorema del sándwich:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} \leq & \lim_{x\to 3} f(x) & \leq \lim_{x\to 3} \left(x^2-6x+11\right) \\ 2 \leq & \lim_{x\to 3} f(x) & \leq 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$. En un gráfico vemos que nuestra función tiene que estar entre la curva de $g(x) = \sqrt{x+1}$ y $h(x) = x^2 - 6x + 11$.

2.3.3. Indeterminaciones con funciones trigonométricas

Lo que vimos antes lo vamos a utilizar para demostrar un límite muy importante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

¿Cómo sabemos que ese límite da 1? Para poder responder a esta pregunta vamos a observar el gráfico de una circunferencia de radio 1 (ver figura 2.14). Determinamos algunos puntos:

- A, que es el origen;
- B, un punto en donde una semirrecta que prolonga un radio de la circunferencia la corta;
- E, la proyección de B en el eje de las abscisas;
- D es el punto en donde comenzamos a tomar los valores de x, es decir, $x = 0$;
- C es el punto de intersección entre la semirrecta mencionada y una recta perpendicular a las abscisas que pasa por D (esta es una recta tangente a la circunferencia).

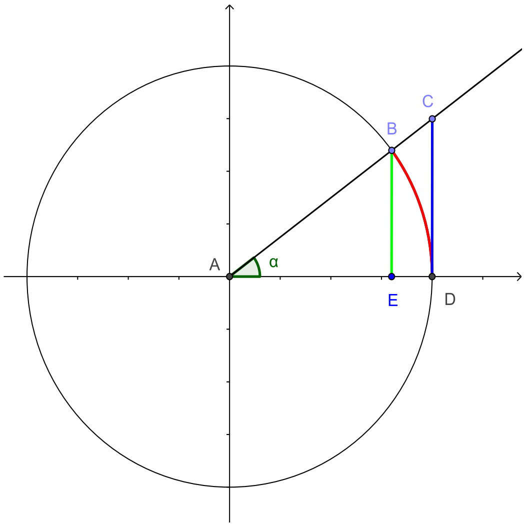


Figura 2.14: Circunferencia de radio 1

En este primer análisis asumimos que x tiende a cero por el lado derecho. Posteriormente, analizaremos x tendiendo a cero por izquierda (hay que tener en cuenta que nunca valdrá cero). El valor de x queda representado por el arco de circunferencia definido por los puntos D y B. Por lo tanto, podemos hacer las siguientes observaciones.

- $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 1$ por ser radios de la circunferencia.
- $sen(x) = \frac{lado-opuesto}{hipotenusa} = \frac{|\overline{BE}|}{1} = |\overline{BE}|$. Nótese que el ángulo α es equivalente a x. Por convención, cuando marcamos un ángulo como una porción de un círculo entre dos semirrectas, lo determinamos en grados y con letras griega, como α, β, etc. Cuando lo tomamos como una porción de arco de la circunferencia de radio 1, lo determinamos en radianes y utilizamos la letra x para su valor.
- $tan(x) = \frac{lado-opuesto}{lado-adyacente} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{CD}|}{1} = |\overline{CD}|$. Estas igualdades se cumplen porque $A\overset{\triangle}{B}E$ y $A\overset{\triangle}{C}D$ son triángulos equivalentes.

Por lo tanto, como x es positivo:

$$|\overline{BE}| \leq x \leq |\overline{CD}|.$$

Pero $|\overline{BE}| = sen(x)$ y $|\overline{CD}| = tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, entonces:

$$sen(x) \leq x \leq \frac{sen(x)}{cos(x)}.$$

Si dividimos todo por $sen(x)$ que es positivo, nos queda:

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{sen(x)}{cos(x)sen(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}.$$

Tomando límite y aplicando el Teorema 2.4 (propiedad del sándwich).

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} 1 \leq & \lim_{x\to 0+} \tfrac{x}{sen(x)} \leq \lim_{x\to 0+} \frac{1}{cos(x)} \\ 1 \leq & \lim_{x\to 0+} \tfrac{x}{sen(x)} \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{sen(x)} = 1$, lo que equivale a $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\frac{sen(x)}{x}} = 1$. Entonces: $\lim_{x\to 0+} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Por otro lado, si la x tiende a cero por el lado izquierdo, tenemos que

$$tan(x) \leq x \leq sen(x).$$

Al dividir por $sen(x)$, como es negativo, las desigualdades se invierten:

$$\frac{1}{cos(x)} \geq \frac{x}{sen(x)} \geq 1$$

quedando la misma expresión de antes. Este límite se puede generalizar en la siguiente propiedad.

Proposición 2.9. *Sea una función cualquiera g tal que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{sen(g(x))}{g(x)} = 1$$

¿Cómo utilizar lo que acabamos de generalizar?

Ejemplo 2.29. Supongamos que tenemos que calcular $\lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x-2}$, nos queda un indeterminado del tipo cociente de infinitésimo. Sin embargo, la expresión que está dentro del *seno* no es la misma que la que está dividiendo, por lo que no se puede afirmar que el límite sea 1. Lo que hacemos, es operar para obtener la misma expresión, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x-2} \cdot 1 \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)(x+2)}{x^2-4} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x^2-4}(x+2) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \lim_{x\to 2} (x+2) \\
&= 1 \cdot 4 = 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.30. Calculemos el siguiente limite: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x}$.

Tenemos una indeterminación "cero sobre cero" que necesitamos salvarla. ¿De qué forma? Podemos usar la misma estrategia que en el ejemplo 2.23, donde usamos el conjugado. ¿Por qué lo usaríamos acá? Recordemos que por propiedad pitagórica:

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x)
\end{aligned}$$

O sea, el cuadrado de la función *seno* es una diferencia de cuadrados que involucra a la función *coseno*.

$$\sin^2(x) = (1-\cos(x))\,(1+\cos(x))$$

Por lo tanto, si tenemos al *seno* en lugar del *coseno* podríamos aplicar la Propiedad 2.9, que acabamos de ver. Entonces vamos a multiplicar y dividir por el conjugado de $1 - \cos(x)$, es decir, por $1 + \cos(x)$; y luego resolvemos.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - cos(x)}{x} . \frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2(x)}{x\,(1 + cos(x))} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - sen^2(x))}{x\,(1 + cos(x))} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x)}{x\,(1 + cos(x))} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{sen(x).sen(x)}{x\,(1 + cos(x))} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} . \frac{sen(x)}{(1 + cos(x))} \\
&= 1 . \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

2.4. Asíntotas lineales a curvas planas

En una conversación informal decimos que una asíntota es una recta a la cual el gráfico de la función se mantiene "pegado" en infinitos puntos. Sin embargo, la palabra "pegado" no es muy precisa en términos matemáticos. En el Diccionario de la Lengua Española (DLE) indica:

> "Línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva, sin llegar nunca a encontrarla".

No siempre este diccionario tiene definiciones correctas, este es uno de los casos. El "sin llegar nunca a encontrarla" indica que la curva (la gráfica de la función) no toca nunca a la recta. Pronto veremos varios ejemplos en donde esto es falso. La misma etimología de la palabra *asíntota* nos señala que no es apropiada para la definición matemática. Es un término que proviene del griego y está formado por el prefijo a (que indica *no*), el adverbio syn (juntos, con) y un derivado del verbo piptein (caer), significando: "no caen juntos", "no coinciden". Entonces, ¿qué definición nos atreveríamos a dar?

> **Definición.** Una asíntota lineal a una curva es una recta que mantiene una distancia infinitesimal o cero con dicha curva en una infinidad de puntos.

Las asíntotas las calcularemos como parte del estudio de funciones que iremos viendo más adelante. Nos serán de utilidad para ver cómo se comporta la función en ciertos casos. Por ejemplo, sacamos un bizcochuelo del horno a 120º de temperatura y lo dejamos en la mesada de la cocina. Sabemos que la temperatura del

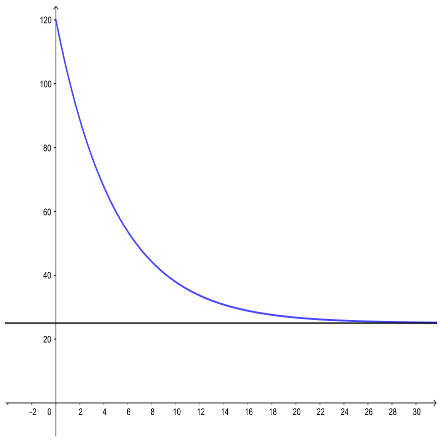


Figura 2.15: Curva de temperatura en función del tiempo con asíntota horizontal

bizcochuelo comenzará a descender hasta llegar a estabilizarse con la temperatura ambiente, digamos 25º. Entonces, si encontramos un modelo que represente el comportamiento de la temperatura del bizochuelo en función del tiempo, la recta constante $y = 25$ será una asíntota horizontal de dicha función como se observa en el gráfico 2.15.

2.4.1. Asíntota horizontal

> **Definición 2.5.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces hay una asíntota horizontal de ecuación $y = b$.

Vemos que el gráfico de una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas horizontales (AH) diferentes: una del lado derecho (x tendiendo a más infinito) y otra del lado izquierdo (x tendiendo a menos infinito). Podría pasar que tenga la misma para ambos lados, o tener AH solo de un lado, o no tener ninguna.

Ejemplo 2.31. Sea la función f definida por $f(x) = x^2$ no tiene AH, porque tanto del lado izquierdo como del derecho, la función tiende a más infinito cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto.Debería darnos un número para que tuviera asíntota horizontal.

Ejemplo 2.32. Sea la función f definida por $f(x) = e^x$. Esta función tiene AH solo del lado izquierdo, cuando x toma valores negativos con módulo muy grandes, la función tiende a cero. Por lo tanto, $y = 0$ es AH. En cambio, cuando x toma valores positivos muy grandes la función tiende a más infinito, por lo que del lado derecho no tiene AH.

Ejemplo 2.33. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x} + 3$. La recta $y = 3$ es AH

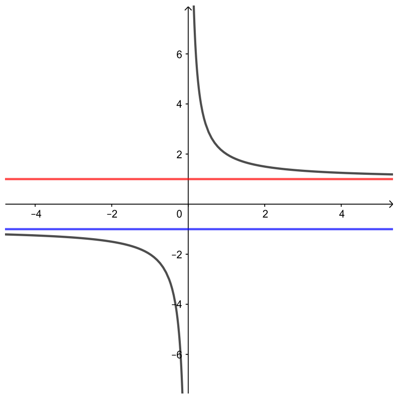


Figura 2.16: Curva correspondiente a $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{|x|}{x}$

tanto del lado derecho como del izquierdo, ya que el límite a x tendiendo a más infinito y a menos infinito da 3 en ambos casos.

Ejemplo 2.34. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{|x|}{x}$. Esta función tiene dos AH: una para el lado derecho y otra para el izquierdo. La división $\frac{|x|}{x}$ da 1 si x es positiva o bien -1 en caso de ser negativa. Por lo tanto, el gráfico 2.16 muestra la curva asociada a está función. Cuyas asíntotas horizontales son $y = 1$ e $y = -1$.

⚠ **Nota.** Hay que tener cuidado cuando se calculan las AH, siempre hay que hacerlo con x tendiendo a más y a menos infinito.

Ejemplo 2.35. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$. El gráfico 2.17 corresponde a esta función y es un ejemplo en el cual la curva asociada a la función y la AH, $y = 0$, pueden coincidir infinitas veces. En forma analítica:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{sen(x)}_{acotada} = 0$$

Ejemplo 2.36. ¿Qué se puede decir de una funciones constantes? Por ejemplo, $f : R \to R / f(x) = 5$. Cuando tomamos el límite a infinito nos da 5. Por lo tanto, $y = 5$ cumple con la definición de AH, en donde el gráfico de la función y su AH son la misma curva.

2.4.2. Asíntota vertical

En definición de asíntota vertical (AV), a diferencia de la AH, la x tiende a un número en lugar de infinito, y el límite nos tiene que dar infinito (positivo o

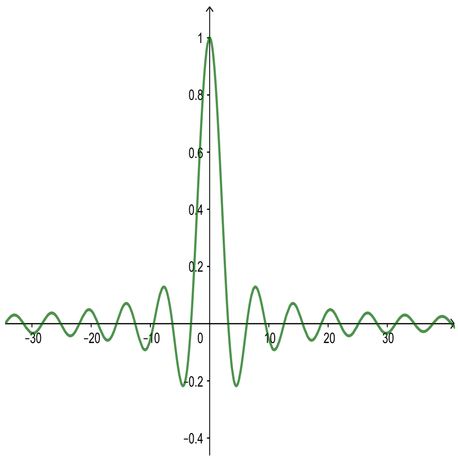


Figura 2.17: AH que es cortada infinitas veces por la curva

negativo) en lugar de un número. Entonces:

> **Definición 2.6.** Si se cumple alguna de las siguientes afirmaciones $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, entonces hay AV de ecuación $x = a$.

El problema con las AV es detectar a qué valores debemos hacer tender a x para verificar si hay o no asíntota. Dado que no podemos comprobar con una infinidad de puntos, los candidatos a AV surgen del dominio de la función. Los candidatos son:

- valores aislados que nos faltan en el dominio;
- si el dominio de la función esta dado por intervalo, hay que tener en cuenta los bordes de dicho intervalo;
- si trabajamos con una función partida tenemos que controlar el punto (o los puntos) en donde nuestra fórmula cambia.

Ejemplo 2.37. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta función, ya la hemos trabajado y hemos visto su gráfica, sabemos que $x = 0$ es la única AV. Como podemos observar en la definición, el dominio de la función es $Df = R - \{0\}$, por lo tanto, el limite a calcular es cuando x tendiendo a 0. Cuando tomamos límite, tanto del lado izquierdo como del derecho, tenemos que el resultado da menos infinito y más infinito, respectivamente. Entonces, decimos que hay AV.

Ejemplo 2.38. Analicemos la función f definida por $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$. En primer lugar sacamos el dominio de la función: $Df = R - \{1, 2\}$, entonces tenemos dos valores a analizar, 1 y 2. Cuando hacemos tender x a 2, el numerador tenderá a 1, y el denominador a 0. Sabemos que, algo que tiende a un número sobre algo que tiende a cero nos da que los valores de la función tiende a infinito. Precisando más: si x tiende a 2 por derecho, nos dará que los valores de la función tiende a más infinito; y si x tiende a 2 por izquierda, el límite será menos infinito. Por lo tanto, concluimos que $x = 2$ es AV del gráfico de f por ambos lados.

En cambio, cuando x tiende a 1, nos quedará una indeterminación del tipo cociente de infinitésimo. Lo que hacemos es factorizar la expresión, simplificar y tomar el límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = -1$$

Como el límite no dio infinito, $x = 1$ no es AV.

⚠ Acabamos de encontrar un ejemplo donde se tienen dos números reales que no pertenecen al dominio de la función, sin embargo, en uno hay AV y en el otro no.

Ejemplo 2.39. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, podemos observar que el dominio es el intervalo: $Df = (0, +\infty)$. Por lo tanto, nuestro candidato a verificar es el 0. Acá solo tiene sentido tomar el límite cuando x tiende a 0 por el lado derecho, ya que del lado izquierdo la función no existe. Efectivamente, cuando tomamos el límite de x tendiendo a 0 por el lado derecho, el resultado nos da más infinito. Por lo tanto, tenemos que AV es $x = 0$.

Ejemplo 2.40. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$. Acá hay que tener cuidado porque el dominio son todos los reales y podríamos apresurarnos en decir que no tiene AV. Pero cuando hagamos tender x a 0 por el lado derecho el límite nos dará más infinito. Por lo tanto, tenemos que $x = 0$ es AV. Este es otro ejemplo en el que la gráfica de la función «toca» a la asíntota, ya que la función en $x = 0$ existe y vale 0. Por lo tanto, el punto $(0, 0)$ pertenece al gráfico de la función y también pertenece al gráfica de la AV, como podemos observar en el gráfico 2.18.

2.4.3. Asíntota oblicua

Con las asíntotas oblicuas (AO) nos pasará algo similar que con las AH. Podremos tener a lo sumo dos, una cuando x tiende a más infinito y otra cuando x tiende a menos infinito. Lo que no puede pasar es que la gráfica de una función tenga,

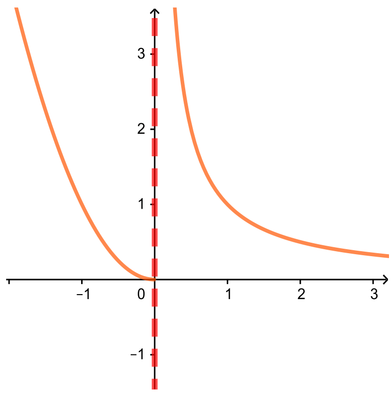


Figura 2.18: Asíntota vertical que comparte un punto con el gráfico de la función

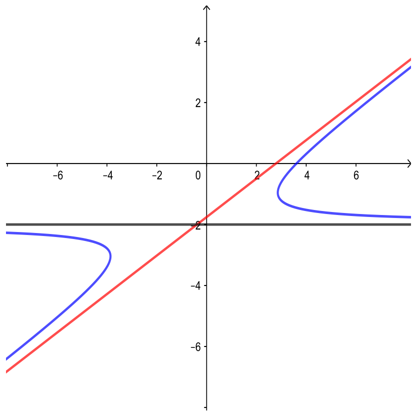


Figura 2.19: Hipérbola con dos asíntotas en cada lado: una horizontal y otra oblicua.

para un mismo lado, AO y AH. Una curva cualquiera podría tener ambas, pero la gráfica de una función no porque tendría más de una imagen para un mismo valor de x, lo cual niega la definición de función, como vemos en la imagen 2.19.

Una AO tendrá la ecuación: $y = mx + b$, con $m \in R - \{0\}$ y $b \in R$. En el caso en que $m = 0$, podríamos tener una AH. Por lo tanto, podemos decir que en el infinito la gráfica de la función y la recta se "juntan", es decir, el límite en el infinito de la resta de la función con la fórmula de la recta debería darnos 0.

> **Definición.** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, entonces $y = mx + b$ es AO.

El problema es cómo calcularla. Veamos que pasa cuando x tiende a más infinito (para x tendiendo a menos infinito, serán los mismos cálculos). Supongamos que existe la asíntota oblicua la cual es $y = mx+b$. Entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$. Estos nos dice que, cuando x tiende a más infinito, $f(x) = mx + b + g(x)$ donde g es un infinitesimo cuando $x \to +\infty$. Podemos dividir todo por x, para obtener: $\frac{f(x)}{x} = \frac{mx+b+g(x)}{x}$. Tomamos limite a ambos miembros nuevamente,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{mx + b + g(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(m + \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}g(x)}_{\to 0} \right) \\ &= m \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por lo tanto, si existe AO, la pendiente la calcularemos con este límite, el cual debe existir y ser distinto de 0:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Para encontrar b, hacemos algo similar. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$. Estos nos dice que, cuando x tiende a más infinito, $f(x) = mx + b + g(x)$ donde g es un infinitesimo cuando $x \to +\infty$. Luego, despejamos b y aplicamos limite nuevamente, para llegar a:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] .$$

Por lo tanto, podemos resumir lo que acabamos de encontrar en la siguiente propiedad.

Proposición 2.10. *Sea f una función. Si $y = mx + b$ es la asíntota oblicua al gráfico de la función f, entonces $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$.*

Ejemplo 2.41. Analizar todas las asíntotas de la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & si\ x \le 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$.

En primer lugar calculamos el dominio. Si miramos la primera rama no existe ninguna restricción para los x menores o iguales que cero; si miramos la segunda rama, tampoco hay restricción para los valores de x mayores a cero. Conclusión, el dominio está definido para todos los reales: $Df = R$. El único valor de x a analizar para una posible AV es $x = 0$, ya que en dicho punto la función cambia su fórmula.

- Asíntotas verticales.
    - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$. Del lado izquierdo no hay AV en $x = 0$.
    - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Del lado derecho tenemos una AV en $x = 0$.
- Asíntotas horizontales.
    - $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x(1-1/x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{1-1/x} = -\infty$. Del lado izquierdo no hay AH.
    - $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Del lado derecho tenemos AH con ecuación $y = 0$.
- Asíntotas oblicuas.
    - Del lado derecho no analizamos AO ya que hay AH, por lo tanto no puede tener AO.
    - Del lado izquierdo puede tener AO ya que no tiene AH. Calculamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1}.\frac{1}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-x}\\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2(1-1/x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene AO con pendiente $m = 1$.

$$\begin{aligned}b = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} - 1.x &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-1}\\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x(1-1/x)}\\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $b = 1$.

La ecuación de la AO es $y = x + 1$.

El gráfico 2.20 corresponde a esta función y sus asíntotas.

Ejemplo 2.42. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$. El dominio de esta función es el conjunto de los reales positivos porque la raíz nos obliga a utilizar valores desde 0 en adelante, pero la división nos excluye al 0. Por lo tanto, $Df = (0, +\infty)$.

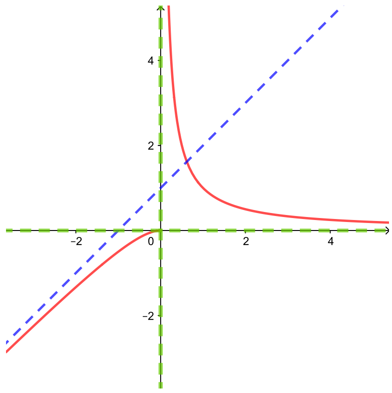


Figura 2.20: Función con los tres tipos de asíntotas.

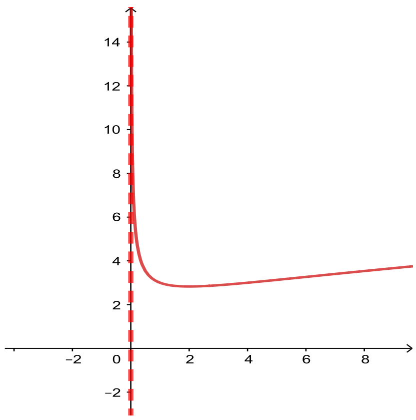


Figura 2.21: Función con una única asíntota vertical

- Asíntotas verticales. El candidato es $x = 0$.
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overbrace{x+2}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0^+}} = +\infty$ La AV es $x = 0$.
- Asíntotas horizontales.
  - Solo podemos verificar del lado derecho: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x(1+2/x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}(1+2/x) = +\infty$ No hay AH.
- Asíntotas oblicuas.
  - Solo podemos verificar del lado derecho: $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}.\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x(1+2/x)}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(1+2/x)}{\sqrt{x}} = 0$ Tampoco hay AO, porque la pendiente no puede dar 0.

La figura 2.21 nos ilustra en detalle cómo es el gráfico de la función.

2.4.4. Ejercicios resueltos de límite y asíntotas lineales

Ejercicio 2.1. Hallar todas las asíntotas de la función $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

Solución. En primer lugar hay que indicar el dominio de la función, en este caso son todos los reales, dado que el argumento de la raíz siempre es mayor o igual que 1. Ahora analizaremos las asíntotas:

- Asíntota horizontal. En este caso hay que analizar el limite de la función tendiendo a más y menos infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(1+x^2)}{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)} = 0
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

- Asíntotas oblicuas, es de la forma $y = mx + b$. Iniciamos calculando el valor de la pendiente. No es necesario analizar cuando $x \to -\infty$ ya que acá hay asíntota horizontal. Por lo tanto, solo analizamos cuando $x \to +\infty$..

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\right)
\end{aligned}$$

  Como en este caso x es mayor que cero, entonces podemos escribir $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty} 1+\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \\
&= 1+\sqrt{1} = 2
\end{aligned}$$

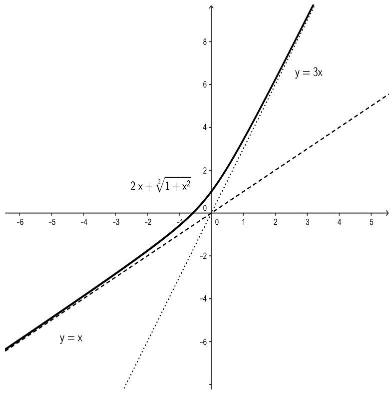


Figura 2.22

Entonces la pendiente de la asíntota oblicua es 2. Calculamos el b.

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2} - 2x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left((\sqrt{1+x^2} - x)\,\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0 \end{aligned}$$

Podemos afirmar que f tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = 2x$, cuando x tiende a más infinito.

Por el análisis efectuado del comportamiento de la función, concluimos que f tiene asíntotas oblicuas cuando $x \to +\infty$ y asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. Como su dominio son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales. En el gráfico 2.22 podemos ver la curva asociada a la función f.

Ejercicio 2.2. La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$, donde a es una constante positiva, tiene dos raíces que dependen del valor de a: $r_1(a) = -\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{1+a}}{a}$ y $r_2(a) = -\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1+a}}{a}$

a. Calcular $\lim_{a\to 0} r_1(a)$ y $\lim_{a\to 0} r_2(a)$.

b. Interpretar los resultados obtenidos, trazando simultáneamente la gráfica de la función f definida por $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, para valores de a tendiendo a cero (por ejemplo, $a = 1;\ 0,5;\ 0,2;\ 0,1;\ 0{,}05$).

Solución. Vamos a resolver cada ítem detalladamente.

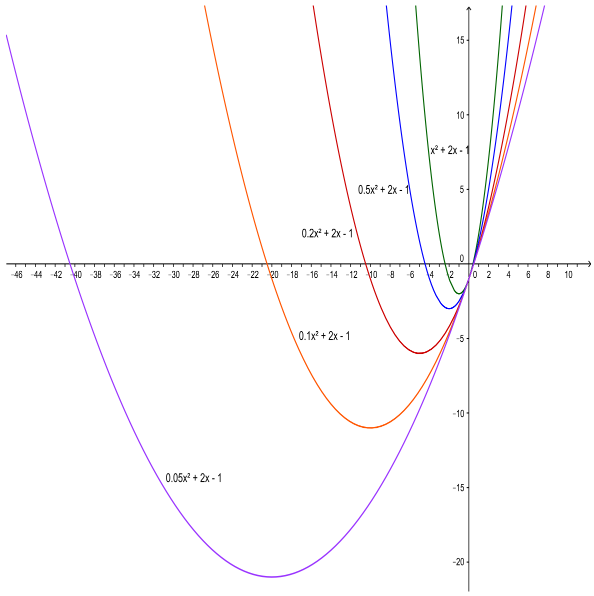


Figura 2.23

a. Calculemos el límite de estas dos funciones, cuando el valor de a tiende a cero.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} r_1(a) &= \lim_{a\to 0}\frac{(\sqrt{1+a}-1)}{a}.\frac{(\sqrt{1+a}+1)}{(\sqrt{1+a}+1)}\\
&= \lim_{a\to 0}\frac{1+a-1}{a\,(\sqrt{1+a}+1)}\\
&= \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+a}+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} r_2(a) &= \lim_{a\to 0}\left(-\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{1+a}}{a}\right)\\
&= \lim_{a\to 0} -\frac{(\sqrt{1+a}+1)}{a} = -\infty
\end{aligned}$$

b. Veamos el gráfico 2.23 para distintos valores de a.

2.5. Continuidad

Decimos sin demasiada precisión que una función es continua si podemos dibujarla sin necesidad de levantar el lápiz. Sin embargo, esto no es una definición matemática y ni siquiera es completamente cierta. Comencemos viendo la continuidad en un punto determinado.

2.5.1. Continuidad en un punto

Definición. Una función f es continua en un valor a de su *dominio* si el límite cuando x tiende a a coincide con el valor de la función en $x = a$, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si el límite planteado no existe, decimos que tenemos una *discontinuidad esencial o inevitable* en $x = a$. Si el límite planteado existe pero no coincide con el valor de la función en $x = a$, decimos que tenemos una *discontinuidad evitable* en $x = a$. Si $x = a$ es un valor aislado de su dominio, entonces se dice que f es continua en $x = a$. Si f es continua en todo valor de su dominio, se dice que f es continua.

¿Qué quiere decir que tenemos una discontinuidad esencial? Que la función no se puede redefinir para que sea continua. En cambio, tener una discontinuidad evitable significa que haciendo algún cambio podemos convertir una función discontinua en un punto en una función continua en ese punto. Es importante destacar, que obtendríamos una función distinta.

Observación 2.1. Es necesario diferenciar el concepto de función continua en un valor de $x = a$ del concepto de función continua (a secas). En secciones posteriores vamos a desarrollar este concepto en detalle, acá solo vamos a establecer la idea. Una función es continua si y sólo si es continua en cada punto de su dominio. La función $f : R - \{0\} \to R / f(x) = \frac{1}{x}$ es continua, ya que tomamos en cuenta su dominio y $x = 0$ no pertenece a dicho conjunto. Esto demuestra que la frase que dice que "una función es continua si puedo dibujarla sin levantar el lápiz" es *falsa* o, por lo menos, incompleta, ya que deberíamos agregar una condición que diga que en cada intervalo de su dominio no se estaría levantando el lápiz. Por lo tanto, podemos decir que:

Las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, fraccionarias (cociente de polinomios) y raíces de polinomios son todas funciones continuas.

Ejemplo 2.43. Analizar si en $x = 0$ la siguiente función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases},$$

presenta una discontinuidad, en caso afirmativo, clasificarla.

Esta función, en $x = 0$ presenta una discontinuidad esencial, dado que no tiene límite cuando x tiende a 0 (del lado derecho da infinito positivo). Por lo tanto, como $x = 0$ está en su dominio decimos que es una función discontinua esencial.

Ejemplo 2.44. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$, analizar si en $x = 2$ la función es continua o discontinua. Si es discontinua en $x = 2$, clasificar.

En primer lugar tomamos límite, como x tiende a 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{x^2 + x - 6}^{\to 0}}{\underbrace{x - 2}_{\to 0}} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x+3) = 5 \end{aligned}$$

Este límite es del tipo cociente de infinitésimo, por lo que al factorizar y simplificar vemos que el límite existe y vale 5, pero es distinto a $f(2) = 3$. Por lo tanto tenemos una discontinuidad evitable en $x = 2$ que hace que f sea una función discontinua. ¿Cómo la podemos arreglar? Cambiando el valor de la función f en $x = 2$ y definimos una nueva función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 5 & si\ x = 2 \end{cases}$$

Nota. Cambiamos el nombre de la función porque f y g no son la misma función, si bien son muy parecidas, g tiene un valor diferente para $x = 2$.

2.5.1.1. Algunas propiedades

Proposición 2.11. ***Adición de funciones***. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces, $h = f \ \pm \ g$, también es continua en dicho punto.

Demostración. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, tal que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} h(x) &= \lim_{x \to a} \ [(f \pm g)(x)] \\ &= \lim_{x \to a} \ [f(x) \pm g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \pm g(a) \\ &= (f \pm g)(a) \\ &= h(a) \end{aligned}$$

□

Las demostraciones de las dos siguientes propiedades son similares a la de la propiedad anterior.

Proposición 2.12. ***Producto entre dos funciones***. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces, $h = f \ . \ g$, también es continua en dicho punto.

Proposición 2.13. ***División entre dos funciones***. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, y $g(a) \neq 0$, entonces, $h = f \ / \ g$, también es continua en dicho punto.

Teorema 2.5. Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $h = f \ o \ g$ es continua en a.

Demostración. Tenemos que demostrar que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$.

Lo primero que hay que verificar es que existe $h(a)$. Esto es inmediato porque $h(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$, que sabemos que existe por hipótesis al decir que f es continua en $g(a)$. Llamemos c a $h(a) = f(g(a))$ y b a $g(a)$, es decir que $c = h(s)$ y $b = g(a)$.

Ahora tenemos que demostrar que existe $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ y que da c. Es decir que existe δ positivo tal que si x pertenece al dominio de $h = fog$ y $0 < |x - a| < \delta$

entonces:

$$|h(x) - c| < \varepsilon, \text{ donde } \varepsilon > 0. \tag{2.8}$$

Vamos a sacar la exigencia de que $|x - a|$ sea mayor a cero dado que en la continuidad la función está definida en el punto. Como g es continua en a, sucede que

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = b.$$

Entonces, existe δ positivo tal que si x pertenece al dominio de g y $|x - a| < \delta$, entonces:

$$|g(x) - b| < \delta'. \tag{2.9}$$

Nótese que en lugar de ε usamos δ', porque es un número positivo cualquiera. Como f es continua en b, sucede que $\lim_{y \to b} f(y) = f(b) = c$. Entonces, existe δ' positivo tal que si y pertenece al dominio de f y $|y - b| < \delta'$, entonces:

$$|f(y) - c| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Pero $y = g(x)$, entonces existe δ' positivo tal que si $g(x)$ perteneciente al dominio de f y $|g(x) - b| < \delta'$, entonces:

$$|f(g(x)) - c| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, por propiedad transitiva entre (2.9) y (2.11) queda que existe δ positivo tal que si x pertenece al dominio de $h = fog$ y $|x - a| < \delta$ entonces

$$|f(g(x)) - c| < \varepsilon.$$

Concluimos que existe δ positivo tal que si x pertenece al dominio de fog y $|x - a| < \delta$ entonces:

$$|fog(x) - fog(a)| < \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim_{x \to a} fog(x) = fog(a)$ y como $h = fog$, demostramos lo deseado:

$$\lim_{x \to a} h(x) = h(a).$$

Entonces, podemos decir que h es continua en $x = a$. $\square$

2.5.2. Continuidad en un intervalo

En la subsección 2.5.1 vimos cómo verificar si una función es continua en un punto determinado, pero se debe tener en cuenta que la continuidad en un punto no es lo mismo que la continuidad en todo el dominio. Entonces, ¿cómo hacemos para verificar la continuidad en una infinidad de puntos?

Para que una función sea continua en un intervalo abierto debe serlo en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, si queremos ver dónde es continua la función $f(x) = x^2$, no podríamos estar aplicando la definición de continuidad en los infinitos puntos de su dominio. Por este motivo, tomamos un punto genérico a. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a)$$

Concluimos que esta función es continua en R. En general, como ya mencionamos previamente, sabemos que:

- las funciones polinómicas y las exponenciales son continuas en R;
- las funciones racionales, las radicales, las logarítmicas y las trigonométricas son continuas en su dominio.

Definición 2.7. Para que una función sea continua en un intervalo cerrado $[a,\ b]$, tiene que ser continua en cada valor del intervalo abierto $(a,\ b)$ y en los bordes: a y b.

Observación 2.2. Cuando tomemos límite de x tendiendo al punto a, solo lo analizaremos por el lado derecho. Y cuando x tienda al punto b lo analizaremos solo por el lado izquierdo.

A continuación, estudiaremos algunos teoremas relacionados con la continuidad en intervalos cerrados. El primero es el teorema de valores intermedios y es muy importante porque lo vamos a utilizar en una infinidad de ejercicios, muchas veces sin que ni siquiera pensemos que lo estamos aplicando.

Teorema 2.6. ***Teorema de valores intermedios.*** Si f es continua en $[a,\ b]$ y $f(a) < f(b)$ (es válido si se invierte la desigualdad) y k es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c interior al intervalo $[a, b]$, donde la función alcanza el valor k.

Esto quiere decir que si tenemos cualquier función f continua con $f(a) < f(b)$ y tomamos un k tal que $f(a) < k < f(b)$ entonces siempre se va a poder encontrar un $c \in (a,\ b)/f(c) = k$. Más aún, este teorema nos dice que si una función es continua en un intervalo cerrado, y $f(a)$ es menor que $f(b)$, la función toma todos los valores intermedios en dicho intervalo. Por ejemplo, si $f(a) = 5$ y $f(b) = 8$, entonces sabemos que habrá valores de x dentro del intervalo en los que la función valga 5.1, 5.2, 6, 6.5, etc. Es decir, todos los valores que están entre 5 y 8. El teorema también se cumple si es al revés: $f(a) > f(b)$.

Si se considera el caso particular en que $k = 0$, entonces estaríamos diciendo que existe c tal que $f(c) = 0$, o sea, que la función f tiene una raíz. Y esto pasaría

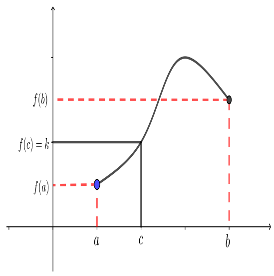


Figura 2.24

si $f(a) < 0 < f(b)$ o al revés, es decir, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. Luego se puede enunciar el siguiente teorema que vamos a analizar su interpretación en detalle, ya que es de gran utilidad para el resto de la materia.

Teorema 2.7. ***Teorema de Bolzano.*** Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$, entonces existe un punto c en el intervalo (a, b) donde $f(c) = 0$.

Observamos que tenemos dos hipótesis:

- f es continua en $[a,\ b]$: esto quiere decir que f es continua en cada valor del intervalo cerrado;
- $f(a).f(b) < 0$: esto significa que la función evaluada en cada extremo del intervalo tiene que tener signos contrarios.

Y la tesis o conclusión es que: existe $c\,\epsilon\,(a,\ b)/f(c) = 0$, esto quiere decir que en el interior de intervalo (a, b) hay por lo menos un cero. En el gráfico 2.25 se ve más claro.

Ejemplo. Supongamos que el intervalo cerrado es el $[2,\ 7]$, y $f(2) = -3$ y $f(7) = 4$, como se ilustra en el gráfico 2.26, y que la función f es continua, entonces se cumplen las hipótesis. Por el teorema, sabemos que en algún lugar del intervalo tiene que cruzar el eje x, es decir, tiene un cero o raíz. No sabemos dónde estará pero sí que pertenecerá al intervalo es un$(2, 7)$. Si se quisiera precisar un poco más, se podría tomar un valor intermedio, por ejemplo, $x = 4$, se observa que $f(4) > 0$, por lo tanto, la raíz buscada estará entre 2 y 4. Luego, se podría tomar $x = 3$ y ver que $f(3) < 0$, de esta forma sabemos que la raíz estará entre 3 y 4. Este procedimiento se puede repetir las veces que se desee hasta encontrar la raíz exacta o, en su defecto, un intervalo que la contiene tan pequeño que cualquier valor de él se podría utilizar como una aproximación de la raíz verdadera.

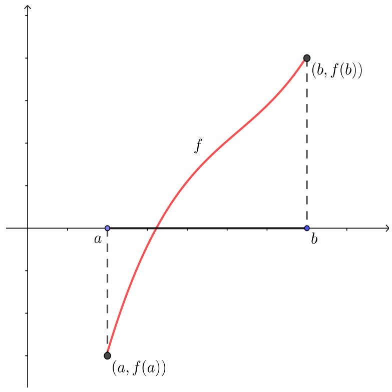


Figura 2.25: Interpretación geométrica del Teorema de Bolzano

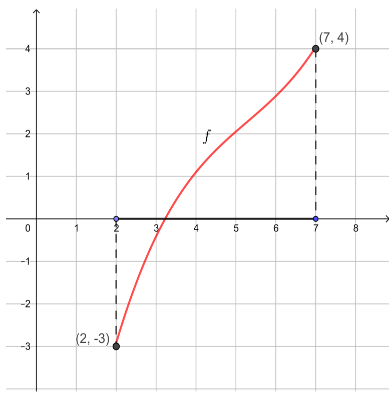


Figura 2.26: Ejemplo en el intervalo $[2, 7]$

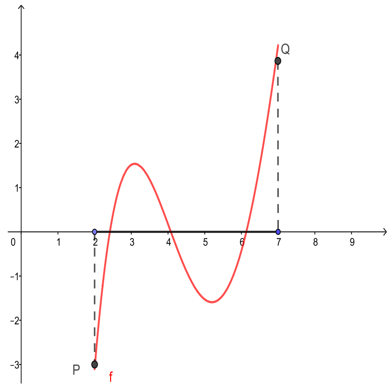


Figura 2.27

Es importante destacar las palabras *por lo menos*, ya que podríamos tener la situación del gráfico 2.27. Como vemos, la función podría estar cruzando más de una vez el eje x. Por lo tanto tener más de una raíz en el intervalo de estudio.

¿Qué pasaría si no quisiéramos tener un cruce con el eje x? Deberíamos "pegar un salto" para llegar de un punto al otro, con lo cual la función no sería continua y estaríamos negando nuestras hipótesis.

Corolario 2.1. ***del Teorema de Bolzano***. Si f es continua en $(a,\ b)$ y no hay ninguna raíz en el intervalo $(a,\ b)$ entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$, $\forall x \in (a,\ b)$

Aclaración: $f(a)$ y/o $f(b)$ pueden ser raíces pero están fuera del intervalo. Este corolario es muy importante y lo usaremos a menudo. Nos dice que si la función es continua en un intervalo abierto, y a lo sumo tiene raíces en los bordes pero ninguna en el intervalo, entonces, en este intervalo, es siempre positiva o bien es siempre negativa.

¿Para qué podemos usar este corolario? Nos sirve para calcular los intervalos de positividad y negatividad de una función. Si conocemos sus raíces y sabemos que es continua, nos alcanza con ver el signo de la función en cualquier punto intermedio de algún intervalo para conocer el signo de la función evaluada en cada valor de este intervalo. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.45. Hallar los intervalos de positividad y negatividad de la función f definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$.

Solución. Sabemos que $Df = R$ y f es continua en R por ser una función polinómica. Si quisiéramos comprobarlo, tomamos la función g definida por $g(x) = x$ que es continua, ya que la función identidad cumple que $\underset{x\to a}{lim}\ g(x) = \underset{x\to a}{lim}\ x = a = g(a)$

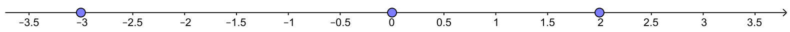


Figura 2.28

para cualquier número a perteneciente a R. Luego, teniendo en cuenta que $x^3 = x.x.x$, podemos decir que como es el producto de funciones continuas, entonces la función h definida por $h(x) = x^3$ es función continua (estamos teniendo en cuenta la propiedad 2.12). Con el resto de los términos aplicamos el mismo criterio, luego aplicamos la propiedad de la adición de funciones continuas y podemos concluir que f es una función continua.

Ahora buscamos los ceros de la función f. Para esto sacamos x factor común:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = 0$$

entonces el producto es cero cuando alguno de los factores es cero, luego queda que:

- $x = 0$;
- $x^2 + x - 6 = 0$, entonces $x = 2$ o $x = -3$.

Sabemos que una cúbica tiene 3 raíces como máximo, por lo tanto las hallamos todas. Su conjunto de ceros será $C_0 = \{-3, 0, 2\}$. Marcamos estos puntos en una recta, ver figura (2.28). Vemos que nos quedan formados 4 intervalos:$(-\infty,\ -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Como se cumplen las hipótesis del corolario visto podemos evaluar la función en cualquier punto del primer intervalo, por ejemplo en -4, e inmediatamente saber el signo de la función evaluada en todo los valores del intervalo. Para hacerlo más sencillo vamos a factorizar la función:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$$

Entonces, analizamos los signos de la función en cada intervalo.

- $sg(f(-4))$ es negativa, ya que todos los factores del producto de $f(x)$ serían negativos al ser avaluados en $x = -4$.
- $sg(f(-1))$ es positivo, porque el signo de los primeros dos factores en negativo y el del último positivo al ser avaluados en $x = -1$.
- $sg(f(1))$ es negativo, debido a que el signo del factor $x - 2$ es negativo y los otros dos tienen signo positivo al ser avaluados en $x = 1$.

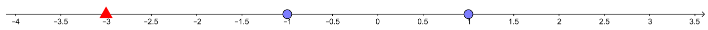


Figura 2.29

- $sg(f(3))$ es positivo, todos los factores tienen signo positivo al ser evaluados en $x = 3$.

Por lo tanto: $C^+ = (-3,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$ y $C^- = (-\infty,\ -3) \cup (0,\ 2)$.

Ejemplo 2.46. Hallar los intervalos de positividad y negatividad de la siguiente función f definida por $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$. En este ejemplo hay que tener mucho cuidado, si bien las únicas raíces son 1 y -1, la función no está definida en $x = -3$. Por lo tanto, este valor lo tenemos que tener en cuenta a la hora de armar los intervalos, ya que cualquier intervalo que incluya el -3 no cumplirá las hipótesis del corolario de Bolzano. Entonces la recta queda dividida por los puntos que se muestran en la figura 2.29. El punto -3 lo graficamos distinto porque no es una raíz, sino un punto en donde la función no está definida. Quedan cuatro intervalos nuevamente: $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$. Hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior, analizamos el signo:

- $sg(f(-4))$ es negativo,
- $sg(f(-2))$ es positivo,
- $sg(f(0))$ es negativo,
- $sg(f(2))$ es positivo.

Por lo tanto, $C^+ = (-3,\ 1)$ U $(1,\ +\infty)$ y $C^- = (-\infty,\ -3)$ U $(-1,\ 1)$

Teorema 2.8. ***de acotación***. Si f es continua en $[a,\ b]$, entonces f está acotada en $[a,\ b]$.

Este teorema nos está diciendo que existe algún valor M tal que es más grande que cualquier valor que pueda tomar la función en el intervalo, y otro valor N que es más chico que cualquier valor que alcance la función en dicho intervalo. En otras palabras: la función no puede ir a $+\infty$ o a $-\infty$ en el intervalo que estamos estudiando. Si pasara eso no estaría acotada. ¿Por qué no puede pasar eso? Porque la función es continua, si pasara que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, con c perteneciente al intervalo $[a,\ b]$, no existiría el límite y no sería continua. Eso solo podría pasar en un borde de un intervalo abierto, pero no de uno cerrado. Por este motivo se pide que el intervalo sea cerrado. En el gráfico 2.30 podemos ver una ilustración de este teorema. Observemos que la función queda encerrada entre dos rectas (podíamos haber utilizado otras dos rectas que cumplieran el mismo objetivo). Esto indica que la función está acotada.

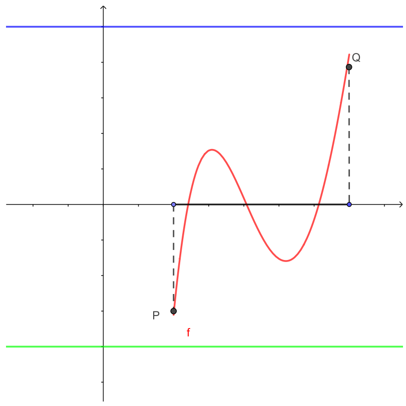


Figura 2.30

2.5.3. Ejercicios resueltos de continuidad

Ejercicio 2.3. Indicar el conjunto de continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3sen(x^2)}{x^2} & si\ x < 0 \\ 2x+3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar calculamos el dominio. La fórmula de la segunda rama no tiene problemas de dominio. En cambio, la formula de la primer rama no admite el valor 0 porque anula el denominador, sin embargo, esta expresión solo se tiene en cuenta para los valores de x negativos. Por lo tanto, $Df = R$.

- Si x es negativa la función es continua, ya que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{3sen(x^2)}{x^2} = \frac{3sen(a^2)}{a^2} = f(a).$$

- Si x es positiva, la función también es continua

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 2x+3 = 2a+3 = f(a).$$

- El único punto posible de discontinuidad será $x = 0$, por lo tanto, debemos analizar qué sucede en dicho punto. Por propiedades, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3sen(x^2)}{x^2} = 3$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+3 = 3$. Vemos que los límites laterales coinciden. Por lo tanto existe el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y vale 3. Además, $f(0) = 3$, como su límite.

Conclusión, f es continua en todos los reales.

Ejercicio 2.4. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x > 1 \\ x + a & si\ x \leq 1 \end{cases}$, hallar el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

Solución. En primer lugar vemos que en $x = 1$ no tenemos problemas con el dominio ya que aplica la expresión de abajo. Luego, tomamos el límite de x tendiendo a 1 por el lado izquierdo y por el derecho:

- Por el lado derecho,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{x}-1}_{\to 0}} \\
&= \lim_{x\to 1+} \left[\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} . \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right] \\
&= \lim_{x\to 1+} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+} \left[(x+1)(\sqrt{x}+1)\right] \\
&= 2 \cdot 2 = 4
\end{aligned}$$

- Por el lado izquierdo: $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x + a) = 1 + a$.
- Pedimos que ambos límites coincidan: $4 = 1 + a$, entonces $a = 3$.
- Pareciera que el ejercicio terminó en el paso anterior, sin embargo, lo que afirmamos es que con $a = 3$ el límite existe. Nos falta decir que, además, el valor del límite calculado coincide con el de la función en $x = 1$, ya que $f(1) = 1 + 3 = 4$.

Ejercicio 2.5. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{3x-3} & si \quad x > 1 \\ \frac{x^2-x}{4x-4} & si \quad x < 1 \end{cases}$. Analizar la continuidad de f en su dominio. Verificar si se puede extender para que sea continua en R.

Solución. Como la función es partida, hay que analizar varias cosas.

- En primer lugar debemos ver el dominio de la función. En este caso el único valor donde la función no está definida es en $x = 1$, entonces, $Df = R - \{1\}$. Luego, analizamos la continuidad.
- Si $x > 1$, f es continua ya que se trata de un cociente de funciones continuas, porque el denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece al conjunto que se analiza.

- Si $x < 1$, f es continua por ser cociente de funciones continuas; y el denominador se anula en $x = 1$ que tampoco está en el intervalo que se analiza.
- En $x = 1$, la función no está definida, por lo tanto no tiene sentido analizar la continuidad. Luego se puede afirmar que f es continua en todo su dominio.
- Por otro lado, se se pide verificar si se puede extender la función para que sea continua en R. Entonces analizamos cuál es el límite de la función cuando x tiende al valor 1 que es el único número que no pertenece al dominio de la función f. Calculamos el límite por derecha y por izquierda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{\sqrt{x}-1}^{\to 0}}{\underbrace{3x-3}_{\to 0}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(3x-3)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x})^2-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^2-x}^{\to 0}}{\underbrace{4x-4}_{\to 0}} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{4(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Como los límites laterales son distintos, entonces no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, es decir, la función no puede extenderse para que sea continua en R.

Ejercicio 2.6. Dada la siguiente ecuación, demostrar que tiene alguna solución real.

$$x\,\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 15\,\sin(x) = 15$$

Solución. Para resolver este ejercicio, es necesario que utilicemos el Teorema de Bolzano.

Armemos la función f definida por $f(x) = x\ \cos(\frac{x}{2}) + 15\ \sin(x) - 15$. Queremos probar que existe por lo menos un valor real donde f vale cero. Como es una suma algebraica de funciones continuas en todos los reales, es una función continua en $\mathbb{R}$. El *Teorema de Bolzano* dice que si en intervalo $[a, b]$ la función es continua y $f(a)f(b) < 0$ entonces existe un c tal que $f(c) = 0$. Entonces necesitamos definir algún intervalo para poder aplicarlo. Inventamos uno en el cual se cumpla la hipótesis, por ejemplo, el intervalo $[0,\ \frac{\pi}{2}]$. Podemos verificar que:

$f(0) = 0. \cos(0) + 15 \sin(0) - 15 = -15 < 0$

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2}. \cos(\frac{\pi}{4}) + 15 \sin(\frac{\pi}{2}) - 15 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 15 - 15 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 0.$

Entonces, como$f$ es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y tiene signo contrario en los extremos del intervalo, existe por lo menos un punto $c\epsilon[0, \frac{\pi}{2}]$, donde $f(c) = 0$, es decir, existe por lo menos una solución de la ecuación dada. Puede haber más, pero el ejercicio solo dice que se demuestre la existencia de alguna. Tampoco hay que encontrarla.