Los números reales

Conjuntos numéricos

Un conjunto es una ***colección*** de objetos. Por ejemplo el conjunto de los divisores de 6.

A cada objeto del conjunto se le da el nombre de ***elemento.*** Así los elementos del conjunto de los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6.

Una forma de referirnos a un conjunto es nombrarlo mediante una letra mayúscula y escribir sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves.

En el ejemplo del conjunto de los divisores de 6 podemos hacerlo así:

$$D = \{1, 2, 3, 6\}$$

Algunos conjuntos numéricos reciben nombres especiales.

Los números naturales

Números naturales

Los números 1, 2, 3, y todos aquellos que nos sirven para contar, forman el conjunto de los ***números naturales***.

Habitualmente se lo denomina con la letra **N**. Podemos referirnos a él de esta manera:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

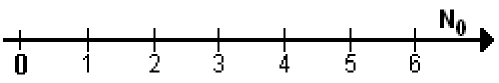
Los puntos suspensivos nos indican que el conjunto tiene infinitos elementos.

- **N** es un conjunto infinito.
- El primer elemento de **N** es el 1.
- Cada número natural tiene un sucesor o siguiente.
- Un número natural y su siguiente se denominan consecutivos.

Si al conjunto de los números naturales se le agrega el cero, a este nuevo conjunto se lo nombra $\mathbf{N_0}$.

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Al conjunto $\mathbf{N_0}$ se lo representa en la recta.



Los números enteros

Números Enteros

En la gran mayoría de las situaciones de la vida real en las que se usan números para representar cantidades de objetos se utilizan números naturales.

Sin embargo en algunos casos, además de registrar una cantidad o un orden, es necesario indicar su relación con respecto a una referencia que se toma como cero.

Por ejemplo, para indicar el año 320 antes de Cristo, usamos la notación -320.

Se trata de los **números enteros negativos.**

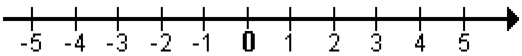
La incorporación de este conjunto de números permite resolver situaciones como la siguiente:

> *Cierto día de agosto, el termómetro señalaba – 8ºC a las 8 de la mañana. A lo largo de la mañana, la temperatura subió 13ºC y durante la tarde descendió el doble de lo que había subido. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro al atardecer?*

Los números naturales junto con el cero y los enteros negativos forman el conjunto de los ***números enteros***. Se lo nombra con **Z.**

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

En la recta numérica los enteros negativos se ubican a la izquierda del cero:

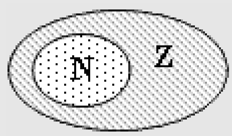


El 5 se ubica a la derecha del cero a 5 unidades de distancia de él, mientras que el -5 se ubica a la izquierda del cero a 5 unidades de distancia de él.

En la recta numérica todo número que se encuentra a la izquierda de otro es menor que éste. Un número entero negativo es siempre menor que cero y que un número entero positivo.

El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$



El símbolo "⊂" se interpreta como "incluido en "

Números Racionales

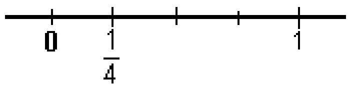
Los números fraccionarios

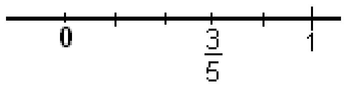
Los ***números fraccionarios*** surgen de la necesidad de expresar partes de la unidad.

Solemos escribir las fracciones como el cociente de dos números enteros en la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

Al número ***a*** se lo llama ***numerador*** y al número ***b, denominador***. El denominador le da el nombre a la fracción, la denomina, mientras que el numerador expresa el número de partes que se consideran del entero.

Por ejemplo $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{5}$ son fracciones de la unidad en las que el numerador es menor que el denominador y se representan en la recta numérica entre el 0 y el 1.



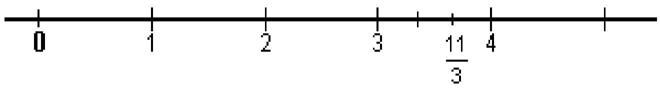


También son números fraccionarios $\frac{11}{3}$; $\frac{17}{4}$ y $-\frac{7}{2}$.

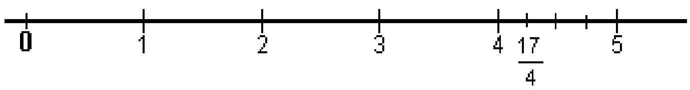
En este caso el numerador es mayor que el denominador y cada uno de ellos equivale a varias unidades completas más una fracción de la unidad.

Los representamos:

$$\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$

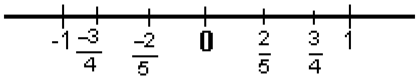


$$\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4}$$



$$-\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2} = -3 + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Los números fraccionarios negativos se representan en la recta a la izquierda del cero. A cada fracción negativa se le asigna el simétrico respecto del cero de los fraccionarios positivos correspondientes.



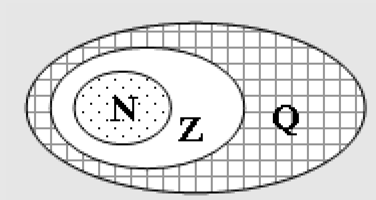
Los números enteros también pueden representarse como fracciones. Por ejemplo;

$$2 = \frac{4}{2} \qquad 0 = \frac{0}{1} \qquad -3 = \frac{-9}{3}$$

Al conjunto formado por todos los números enteros y todos los fraccionarios se lo llama ***conjunto de los números racional***es, y se lo designa con **Q**

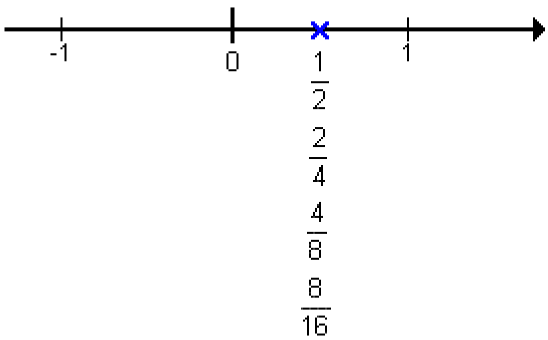
Todo número entero es racional: $Z \subset Q$

Además, $N \subset Z \subset Q$



Fracciones equivalentes

Al representar sobre la recta numérica los números $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{16}$ vemos que todos ellos ocupan el mismo punto de la recta.



Decimos que $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{16}$ representan el mismo número racional, o bien que son equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Podríamos encontrar infinitas fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ con sólo multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número entero distinto de cero. A este proceso se lo llama *amplificación*.

Si ***m*** ($m \neq 0$) es este número entero, entonces todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ tienen la forma:

$$\frac{1 \cdot m}{2 \cdot m}$$

En general:

Cualquiera que sea el número entero $m \neq 0$ las expresiones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ son *equivalentes* y representan el mismo número racional, o sea $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$

Por ejemplo, son fracciones equivalentes y representan el mismo número racional, los números

$$\frac{3}{5};\ \frac{6}{10};\ \frac{9}{15};\ \frac{12}{20}$$

También podemos encontrar fracciones equivalentes a otra dividiendo numerador y denominador por el mismo número entero, siempre que el numerador y el denominador sean divisibles por este número entero. Esto es lo que habitualmente se llama ***simplificar*** una fracción.

Por ejemplo en la fracción $\frac{28}{36}$, podemos dividir al numerador y al denominador por 4. Al hacerlo resulta: $\frac{28:4}{36:4} = \frac{7}{9}$.

Luego es $\frac{28}{36}$ equivalente a $\frac{7}{9}$, es decir: $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$.

Como a 7 y 9 sólo tienen como divisor común a 1, decimos que la fracción $\frac{7}{9}$ es *irreducible*.

Simplificar una fracción es hallar la fracción irreducible equivalente a la dada.

Para recordar:

- ***a.*** ***Si se multiplica el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número entero distinto de cero, la nueva fracción es equivalente a la primera.***
- ***b.*** ***Si se divide el numerador y el denominador de una fracción por un número entero que sea divisor de ambos se obtiene una fracción equivalente a la primera***
- ***c.*** ***Mediante la amplificación y la simplificación de una fracción se obtienen fracciones equivalentes.***

Expresiones decimales

Todo número racional puede expresarse en forma de fracción o en forma decimal.

Para obtener la expresión decimal de un número racional expresado en forma fraccionaria se divide el numerador por el denominador.

- Si al dividir el numerador por el denominador, después de varios pasos, el resto de la división es cero, entonces el cociente es un ***numero decimal exacto.***

$$\frac{2}{5}=0{,}4\,;\ \frac{22}{4}=5{,}5$$

Decimos que es una ***expresión decimal finita****.*

Estas expresiones provienen de ***fracciones decimales****,* es decir de aquellas fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 o puede escribirse como una potencia de 10.

$$\frac{36}{100}=0{,}36$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{4}{10}=0{,}4$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{375}{1000}=0{,}375$$

- Otras fracciones, como por ejemplo $\frac{1}{3}$ no pueden escribirse como fracciones decimales, es decir con denominadores que sean potencias de 10.

En estos casos, al dividir el numerador por el denominador, luego de un número de pasos, tanto los restos como las cifras del cociente comienzan a repetirse.

Se trata de ***expresiones decimales periódicas***.

$$\frac{5}{3}=1{,}66666...=1{,}\overline{6}$$
$$\frac{7}{11}=0{,}636363...=0{,}\overline{63}$$
$$\frac{5}{18}=0{,}277777...=0{,}2\overline{7}$$

Al número o bloque de números que se repite se lo llama ***período***.

Los decimales exactos y periódicos pueden expresarse en forma de fracción.

Nos planteamos ahora el problema que consiste en determinar para cada expresión decimal, el numerador y denominador de una fracción, la cual tenga por expresión decimal la dada.

- *Consideramos el caso en que la expresión decimal es finita.*

  Escribimos la parte decimal como suma de fracciones decimales*:*

$$3{,}512 = 3+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}=\frac{3512}{1000}$$

$$0{,}00015 = 0+\frac{1}{10000}+\frac{5}{100000}=\frac{15}{100000}$$

- *Consideramos el caso en que la expresión decimal es periódica*:

1. Expresamos a = $0{,}\widehat{5}$ **como fracción**

$a = 0{,}\widehat{5}$ (1)

$10 \cdot a = 5{,}\widehat{5}$ (2) — Se multiplica por 10 para obtener otro número con el mismo período.

$10 \cdot a - a = 5{,}\widehat{5} - 0{,}\widehat{5}$ — Al restar a la expresión (2) la expresión (1) desaparece la parte periódica

$9\, a = 5$

$a = \frac{5}{9}$ — Dividimos por 9 para hallar el valor de a

Luego es $0{,}\widehat{5}=\frac{5}{9}$

2. Expresamos b = $0,3\overline{2}$ como fracción

Este número tiene una parte no periódica (3) y una periódica (2).
El procedimiento para escribirlo como fracción es similar al anterior.

$b = 0,3\overset{\frown}{2}$

$10 \cdot b = 10 \, . \, 0,3\overset{\frown}{2}$ $10 \cdot b = 3,\overline{2}$ (1)	Al multiplicar por 10 conseguimos una expresión cuya parte decimal es periódica pura.
$10. \, 10 \cdot b = 10. \, 3,\overset{\frown}{2}$ $100. \, b = 32,\overset{\frown}{2}$ (2)	Multiplicamos por 10 la última igualdad para obtener otro número con el mismo período.
$100. \, b - 10b =$ $32,\overset{\frown}{2} - 3,\overset{\frown}{2}$	Al restar a la expresión (2) la expresión (1) desaparece la parte periódica.
$90 \, b = 29$	
$b = \dfrac{29}{90}$	Dividimos por 90 para hallar el valor de b

Luego es $0,3\overset{\frown}{2} = \dfrac{29}{90}$

Números reales

Los números irracionales

Entre los números conocidos, existen aquellos que no pueden escribirse como el cociente entre dos números enteros. Son los llamados ***números irracionales*** (**I**)

Son números irracionales:

0, 01001000100001...

5,123456789101112...

-4,515115111511115…

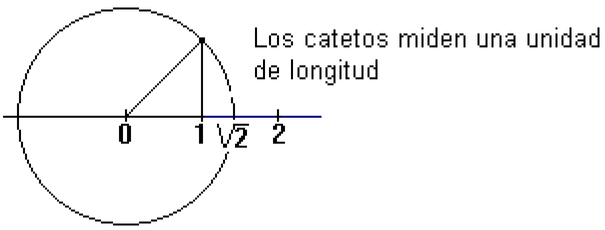
$\sqrt{2} = 1,4142135623...$

$\pi = 3,1415926535...$

$e = 2,718281...$

- Estos números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros.
- Los números irracionales tienen un desarrollo decimal infinito no periódico.

Algunos números irracionales, pueden ubicarse en la recta numérica mediante construcciones geométricas.



Otros números irracionales no pueden ubicarse en la recta mediante construcciones geométricas, aunque sí pueden ser ubicados en ella por otros procedimientos.

Por ejemplo: π; e; $\sqrt[3]{2}$.

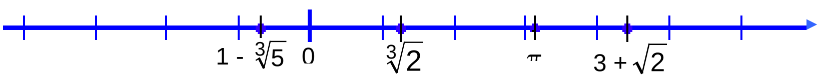
La posibilidad de hacerlo permite ver que los puntos que han ocupado estaban vacíos y que en ellos no están ubicados otros números racionales. Los infinitos huecos que dejan entre sí los números racionales son ocupados por los números irracionales.

En general para representar **los números irracionales** en la recta numérica usamos una **aproximación decimal** de los mismos.

Por ejemplo:

- $\pi \cong 3{,}14$ representa una aproximación del número irracional π.
- $\sqrt[3]{2} \cong 1{,}25$ representa una aproximación del número irracional $\sqrt[3]{2}$.
- 4,41 representa una aproximación del número irracional $3 + \sqrt{2}$.
- $1 - \sqrt[3]{5} \cong -0{,}71$ representa una aproximación del número irracional $1 - \sqrt[3]{5}$

En la recta, su representación aproximada es:



Cualquier segmento sobre la recta por pequeño que sea contiene infinitos puntos racionales (lo que hace que pueda decirse que Q es denso) y a pesar de ello contienen otros puntos, también infinitos: los números irracionales.

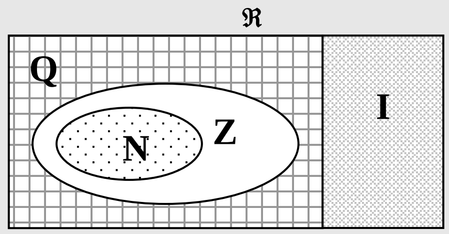
Los números reales

- Ambos conjuntos: los irracionales (**I**) junto con los racionales (**Q**), forman el conjunto de los **números reales:** $\Re$ (es decir, tanto los racionales como los irracionales son números reales).
- Los números reales llenan por completo la recta (por eso se la llama recta real). A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real, un punto en la recta.
- Esta propiedad de los números reales se conoce como ***propiedad de completitud de los números reales.***

Los números irracionales (I), junto con los números racionales (Q) forman el conjunto de los números reales ($\Re$).

$$\Re = I \cup Q$$

Además $I \cap Q = \varnothing$



Para recordar

- Los números 1, 2, 3, y todos aquellos que nos sirven para contar, forman el conjunto de los ***números naturales***.

  Se lo denomina con la letra **N**. Podemos referirnos a él de esta manera:

  $$\mathbf{N = \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

- Los números naturales junto con el cero y los enteros negativos forman el conjunto de los ***números enteros***. Se lo nombra con **Z.**

  $$\mathbf{Z = \{\ldots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

- A los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros en la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, se los llama **números racionales**.

  Se lo designa **Q** y se lo puede caracterizar de esta manera:

  $$Q = \left\{ \frac{a}{b} ; a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

- Entre los conjuntos **N**; **Z** y **Q** se verifican las inclusiones:

  $$N \subset Z \subset Q$$

  lo que significa que todo número natural es un entero, y que todo número entero es un número racional.

- Aquellos números que no pueden escribirse como cociente entre dos números enteros se los llama **irracionales (I)**. Son aquellos números que tienen una expresión decimal que no termina nunca, ni es periódica.

- Los números racionales junto con los números irracionales forman el conjunto de los **números reales** ($\mathfrak{R}$)

  $$\mathfrak{R} = I \cup Q$$

  - Los números racionales están incluidos en el conjunto de los números reales.
  - Los números irracionales están incluidos en el conjunto de los números reales.
  - Pero: $I \cap Q = \varnothing$

- Lo que quiere decir no hay números racionales que sean irracionales y que no hay números irracionales que sean racionales.