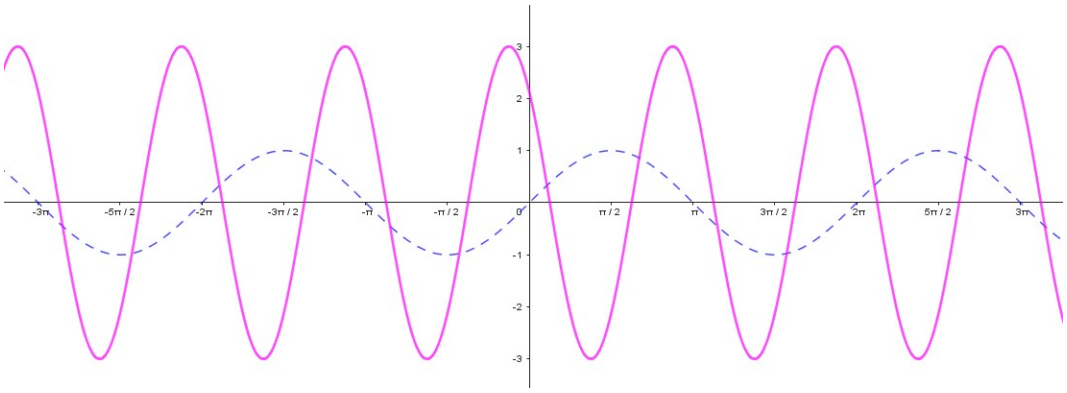
Análisis Matemático A
(Para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)

Funciones
Segunda Parte



$$f(x) = A\sin(bx - \phi_0) + C$$

Lorena Nicolás

Matías Aiello

Julia Bolívar

Adriana Cabana

Silvina García Serrano

Paula Remesar

Índice

Función polinómica **2**

Función Módulo o Valor Absoluto **6**

Función Homográfica **9**

Funciones Racionales **14**

Composición de funciones **16**

Funciones Transcendentes **17**

Función exponencial en base a **18**

Función inversa de una exponencial en base a: Función Logarítmica **25**

Funciones trigonométricas **30**

Función polinómica

Son de la forma

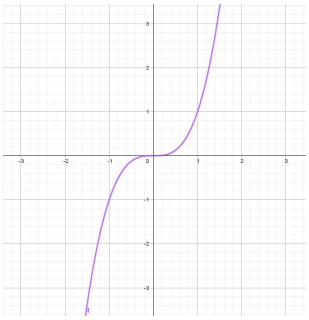
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Se dice que la función es de *grado* n con $n \in \mathbb{N}$. Las funciones lineal y cuadrática que estudiamos en la sección anterior, son casos particulares de esta. En efecto:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad n = 2$$
$$g(x)x = a_1 x + a_0 \qquad n = 1$$

También está el caso especial del polinomio nulo ($P = 0$), que no tiene grado.
Ejemplo 1: Comencemos por graficar la función $f(x) = x^3$.

Resolución:



Con la ayuda de una tabla de valores o un programa graficador podemos encontrar el gráfico de la función. Tanto por medios analíticos, como observando el gráfico, podemos ver que se trata de una función impar, es decir, $f(x) = -f(-x)$.

Además, esta función está definida para todo número real y para cada uno arroja un resultado distinto, de modo que:

- el dominio natural es $Dom\ f = \mathbb{R}$.
- imagen $Im\ f = \mathbb{R}$.

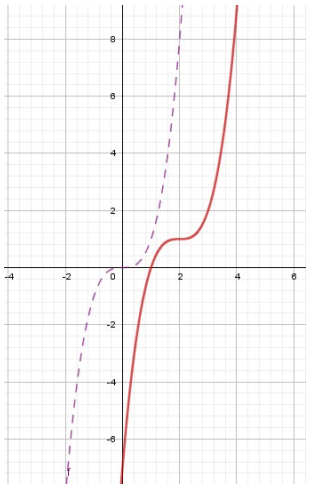
Ejemplo 2: A partir de la función anterior, realizar un gráfico de $g(x) = (x-2)^3 + 1$ teniendo en cuenta los corrimientos.

Resolución:

La curva $g(x) = (x-2)^3 + 1$ puede obtenerse desplazando el gráfico de $f(x) = x^3$ dos unidades en el sentido positivo (en este caso hacia la derecha) del eje de las abscisas (en nuestro sistema el eje x) y una unidad en el sentido positivo (en este caso hacia arriba) del eje de las ordenadas (en nuestro sistema el eje y).

El dominio natural es $Dom\ f = \mathbb{R}$ y la imagen $Im\ f = \mathbb{R}$.

En el gráfico muestran las dos funciones; en línea de puntos violeta la función $f(x) = x^3$ y en trazo sólido rojo la función $g(x) = (x-2)^3+1$. De esta manera puede apreciarse el corrimiento en los ejes coordenados.



División de polinomios

Recordemos que un polinomio $P(x)$ puede dividirse por otro $Q(x)$ si verifica que $gr\ P \geq gr\ Q$. En este caso:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

Donde $P(x)$ es el dividendo, $Q(x)$ el divisor, $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto. Además,

$$\begin{cases} gr\ P \geq gr\ Q \quad \wedge \quad (gr\ R < gr\ Q \ \vee \ R = 0) \\ P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \end{cases}$$

Ejemplo 1:

Calcular el cociente y el resto de la división entre los siguientes polinomios:
$P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

Resolución: Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$\begin{array}{rl} x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 & \big| \ x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^4 + 2x^3 - x^2 & \quad x^2 - 3 \\ \hline -3x^2 + 0x - 3 & \\ 3x^2 - 6x + 3 & \\ \hline -6x & \end{array}$$

Se puede observar que $C(x) = x^2 - 3$ y $R(x) = -6x$.

Regla de Ruffini

Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente de la división entre un polinomio cualquiera y otro que guarda la forma $x + a$

Ejemplo 2:

Hallar el cociente y el resto de la división entre $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 21$ y $Q(x) = x - 2$.

Resolución:

No olvidar ordenar y completar el dividendo, si fuere necesario.

	1	-7	14	-21	← coeficientes del dividendo
$-a = 2$	↓	2	-10	8	
	1	-5	4	-13	← resto

↖ coeficientes del cociente ordenado

Por lo tanto, obtenemos que $C(x) = x^2 - 5x + 4$ y $R(x) = -13$. Observemos que el grado del cociente es el grado del dividendo menos uno, es decir: $gr\ C = 3 - 1 = 2$.

Factorización de la función polinómica

Podemos extender lo visto en el capítulo de función cuadrática para la función polinómica. De estar forma, dada la función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, podemos escribirla como:

1. Si tiene n raíces reales simples $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.
2. Si tiene j raíces reales múltiples $P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_j)^{k_j}$

Vale aclarar que una raíz o cero x_j de un polinomio tiene orden o multiplicidad k_j, si el polinomio es divisible por $(x - x_j)^{k_j}$ pero no lo es por $(x - x_j)^{k_{j+1}}$.

Observación: En la factorización de una función polinómica pueden aparecer expresiones de grado par (por ejemplo, cuadráticas) irreducibles, en cuyo caso la función no tiene raíces reales.

Ejemplo 1:

Veamos algunos casos de polinomios ya factorizados.

a) $P(x) = x^2(x-1)$ Esta es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son $x = 0$, con multiplicidad 2 (raíz doble) y $x = 1$, con multiplicidad 1 (raíz simple).

b) $P(x) = 2x(x-1)^2(x+2)^3$ Este polinomio es de grado 6. Sus ceros son $x = 0$, con multiplicidad 1 (raíz simple) , $x = 1$ con multiplicidad 2 (raíz doble) y $x = -2$ con multiplicidad 3 (raíz triple).

c) $P(x) = x(x+1)(x^2+1)^2$ Este polinomio también es de grado 6. Tiene dos ceros $x = 0$ y $x = -1$, ambos con multiplicidad 1 (raíces simples), los otros dos ceros son complejos.

Ejemplo 2:

Probar que $x = 1$ es raíz de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Obtener la expresión factorizada del polinómio.

Resolución:

Para demostrar que $x = 1$ debemos probar que $P(1) = 0$ o bien que el polinomio es divisible por $(x - 1)$.

Si evaluamos $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, con esto vemos que $x = 1$ es raíz de P. Para obtener la expresión factorizada del polinomio aplicamos la regla de Ruffini, teniendo en cuenta que ya encontramos una raíz.

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0

De esta expresión se observa que $P(x) = (x-1)(x^2+1)$. En ella se ve también que ha aparecido un factor cuadrático irreducible, con lo cual, el polinomio tiene un par de raíces complejas conjugadas.

Teorema del resto:

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x+a$ es igual al valor del polinomio evaluado en $x = -a$, es decir, $P(-a)$.

En efecto,

$$\begin{array}{ll} P(x) & \big| \; x+a \\ \hline R & C(x) \end{array}$$

Como $P(x) = C(x)(x+a)+R$, evaluando esta expresión en $x = -a$, resulta $P(-a) = R$.

Ejemplo 3:

Sean $f(x) = x^3 + kx^2 - kx - 9$ y $g(x) = x + 3$. Utilizar el teorema del resto para determinar los valores de k en los reales tales que $g(x)$ sea un factor de $f(x)$.

Resolución:

Para poder escribir $g(x)$ como un factor de $f(x)$, el polinomio debe ser divisible por $x+3$, es decir, el resto de la división de $f(x)$ por $(x+3)$ debe ser cero. Así, podemos plantear

$$R = f(-3) = 0 \rightarrow (-3)^3 + k(-3)^2 - k(-3) - 9 = 0 \rightarrow k = 3$$

Ejemplo 4:

Hallar la función polinómica de grado 3, cuyos ceros son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$ y su gráfico pasa por el punto de coordenadas $(2, 24)$.

Resolución:

Podemos proponer $f(x) = ax(x-1)(x+2)$.

Como el valor de a no está determinado, usamos el otro dato del problema: que su gráfico pasa por el punto $(2, 24)$, esto significa que $f(2) = 24$, así

$$f(2) = a2(2-1)(2+2) \rightarrow f(2) = a8 = 24 \rightarrow a = 3$$

Podemos entonces escribir

$$f(x) = 3x(x-1)(x+2)$$

Función Módulo o Valor Absoluto

Presentación

En un laboratorio se están realizando experimentos con distintas sustancias químicas, una de ellas precisa que la temperatura ambiente se encuentre a $15°C$ aceptando un error de $2°C$, se debe prender el aire acondicionado cada vez que la temperatura no sea la adecuada. ¿Para qué valores de temperatura ambiente se debería activar el aire acondicionado?

Como el error aceptado es de $2°C$ se debe prender el aire cuando la distancia de la temperatura ambiente y $15°C$ sea mayor que $2°C$, o sea cuando la temperatura es mayor que $17°C$ o menor que $13°C$. Matemáticamente esto se escribe como:

$$|x - 15| > 2$$

Recordemos que el módulo o valor absoluto de un número real es la distancia de x al 0, y lo notamos $|x|$.

Por ejemplo: $|5| = 5, |-3| = 3$ En el caso de la desigualdad $|x - 15| > 2$ estaríamos diciendo que la distancia entre la temperatura x y 15 debe ser mayor que 2 para que sea necesario activar el aire acondicionado.

Propiedades:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x.y| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- Si $a > 0$, $|x| = a \leftrightarrow x = a \vee x = -a$
- Si $a > 0$, $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$
- Si $a > 0$, $|x| > a \leftrightarrow x < -a \vee x > a$

Observemos que la inecuación:

$$|x - 15| > 2$$

podemos traducirla en:

$$x - 15 < -2 \quad \vee \quad x - 15 > 2 \;\leftrightarrow\; x < -2 + 15 \quad \vee \quad x > 2 + 15$$

Es decir:

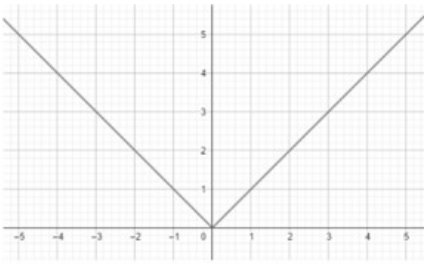
$$x < 13 \quad \vee \quad x > 17$$

Función Módulo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Una función módulo es una función partida o definida a trozos ya que está definida por intervalos. En este caso podemos observar que cada tramo corresponde a una función lineal. Observando esto podemos construir su gráfico ya que para $x \geq 0$, debemos graficar: $y = x$; y para $x < 0$, graficamos: $y = -x$.

Su gráfico es:



Observando el gráfico podemos destacar:

- La simetría del gráfico respecto de la recta $x = 0$ (eje de simetría)
- Su imagen es $Im\ f = [0, +\infty)$
- El gráfico presenta un mínimo en $x = 0$

A partir de este gráfico podemos construir otros, teniendo en cuenta lo trabajado para la expresión canónica de la parábola.

Las mismas ideas podemos utilizar para pensar en el gráfico de una función módulo expresada del siguiente modo:

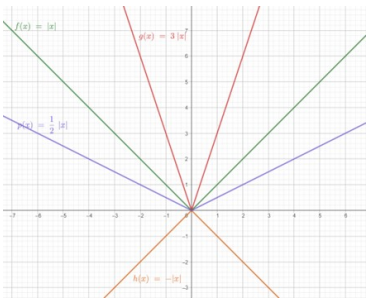
$$f(x) = a|x - x_0| + y_0$$

En este caso el eje de simetría será la recta $x = x_0$

La imagen será $[y_0, +\infty)$, si $a > 0$

La imagen será $(-\infty, y_0]$, si $a < 0$

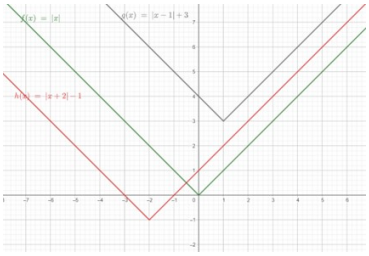
Veamos primero, algunos ejemplos modificando el valor de a:



El gráfico de $h(x)$ se obtiene al reflejar el gráfico de $|x|$ respecto al eje x.

El gráfico de $g(x)$ se acerca al eje y, y el de $p(x)$ se acerca al eje x.

Veamos ahora, algunos ejemplos modificando x_0 e y_0:



El gráfico de $g(x)$ es un desplazamiento de $|x|$ de 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

El gráfico de $h(x)$ es un desplazamiento de $|x|$ de 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia abajo.

Ejemplo 1:

Representar gráficamente la función $f(x) = -|x+3|+4$ e indicar dominio e imagen. Hallar los ceros analíticamente.

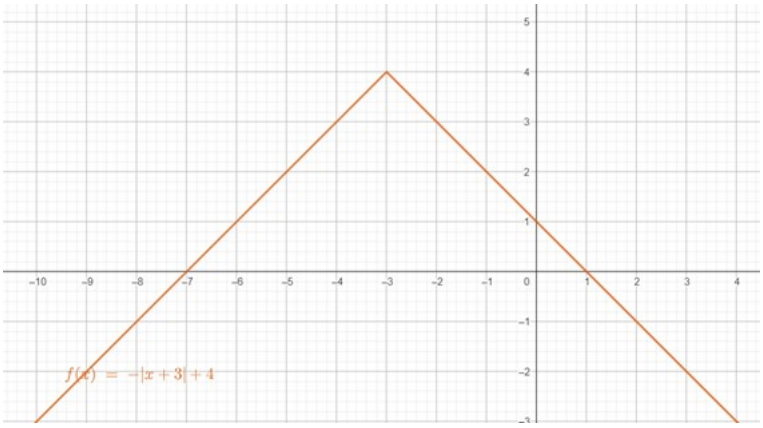
Resolución:

El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Vamos a encontrar los ceros analíticamente, para ello debemos resolver la ecuación:

$$\begin{array}{rcl} -|x+3|+4 & = & 0 \\ -|x+3| & = & -4 \\ |x+3| & = & 4 \\ x+3=4 \quad \vee & & x+3=-4 \\ x=1 \quad \vee & & x=-7 \end{array}$$

Para graficar la función podemos usar los ceros (donde el gráfico corta el eje x) y también pensar en lo visto anteriormente, el gráfico se obtiene al reflejar $|x|$ respecto al eje x, y desplazarlo 3 unidades a la izquierda y 4 hacia arriba:



La imagen es: $Im(f) = (-\infty, 4]$

Función Homográfica

Responden a la expresión

$$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{a}{x - x_0} + y_0$$

con $a \neq 0$ y donde x_0, a e y_0 son constantes reales y $\mathbb{D}$, dominio de la función, es un conjunto tal que **el denominador es distinto de cero**. Esto se escribe:

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} / x - x_0 \neq 0\}$$

Veremos el gráfico de estas funciones para el caso particular

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

que corresponde a una función homográfica con $a = 1, x_0 = 0, y_0 = 0$.

Primero definamos su dominio, dicho conjunto debe ser tal que la variable x no tome el valor cero ($x \neq 0$), puesto que para dicho valor se anula el denominador. Por lo tanto, $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$ o bien $Dom\ f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Hagamos entonces una tabla de valores para llegar al gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$

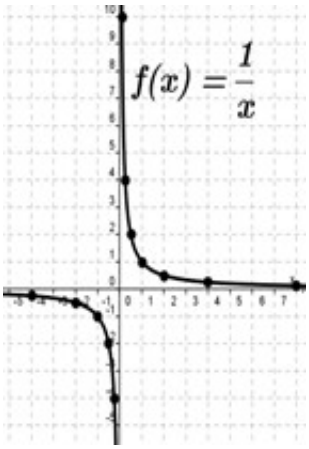
x	f(x)
1	1
0,5	2
0,25	4
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
-0,001	-1000
-0,01	-100
-0,1	-10
-0,25	-4
-0,5	-2
-1	-1

x	f(x)
1000	0,001
100	0,01
10	0,1
8	0,125
4	0,25
2	0,5
-2	-0,5
-4	-0,25
-8	-0,125
-10	-0,1
-100	-0,01
-1000	-0,001

En la tabla de la izquierda se puede observar que, a medida que x se aproxima a 0, tanto cuando toma valores mayores a cero (por la derecha), como cuando toma valores menores a cero (por la izquierda); los valores de $|f(x)|$ se hacen arbitrariamente grandes.

En la tabla de la derecha, en cambio, se observa que, para valores de $|x|$ cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se aproximan arbitrariamente a cero.

Si ahora ubicamos estos puntos hallados en el plano y los unimos se obtiene el siguiente gráfico



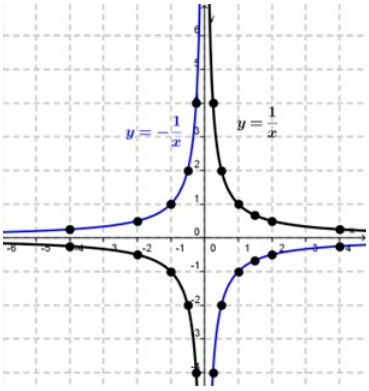
El gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ se denomina ***hipérbola***. Podemos observar que a medida que x aumenta en valor absoluto, el gráfico se aproxima al *eje x* (eje de abscisas); en este caso diremos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal al gráfico de f.

Por otro lado, cuando x toma (en valor absoluto) valores próximos a cero, el gráfico se aproxima al *eje y* (eje de las ordenadas); en este caso diremos que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical al gráfico de f.

Del gráfico se ve, además:

$$\begin{aligned} Im\ f &= \mathbb{R} - \{0\} \\ Pos\ f &= (0\ ;\ +\infty) \\ Neg\ f &= (-\infty\ ;\ 0) \end{aligned}$$

Analicemos ahora la función $f(x) = -\frac{1}{x}$



Estas funciones son impares, esto es $f(x) = -f(-x)$, basta recordar las funciones $f(x) = x^3$ y $f(x) = -x^3$ donde se vio que sus gráficos son simétricos con respecto al eje de abscisas. De la misma forma, podemos obtener el gráfico de $f(x) = -\frac{1}{x}$ buscando el simétrico a cada punto del gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, con respecto al eje de abscisas.

Se ve, además, que comparten dominio e imagen pero se invierten sus conjuntos de negatividad y positividad. Es decir:

$$\begin{aligned} Im\ f &= \mathbb{R} - \{0\} \\ Neg\ f &= (0\ ;\ +\infty) \\ Pos\ f &= (-\infty\ ;\ 0) \end{aligned}$$

Funciones homográficas y desplazamientos

Al igual que lo estudiado para las anteriores funciones podemos mencionar las siguientes conclusiones sobre el efecto de los parámetros a,x_0 e y_0 en el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Conclusiones

- El coeficiente a es un factor de escalamiento: el gráfico de $f(x) = \frac{a}{x}$ se aproxima al *eje x* conforme $|a|$ se aproxima a cero y se aproxima al *eje y* conforme $|a|$ aumenta.
- El valor de x_0 determina que el gráfico de $f(x) = \frac{a}{x}$ se desplace x_0 unidades a la derecha si $x_0 > 0$ o x_0 unidades a la izquierda si $x_0 < 0$.
- El valor de y_0 determina que la gráfica de $f(x) = \frac{a}{x}$ se desplace y_0 unidades hacia arriba si $y_0 > 0$ o y_0 unidades hacia abajo si $y_0 < 0$.
- A partir de la ecuación $f(x) = \frac{a}{x-x_o} + y_o$ de la función homográfica es inmediato indicar cuáles son las asíntotas de la función. Sus ecuaciones son: $x = x_0$ la ecuación de la asíntota vertical e $y = y_0$ la ecuación de la asíntota horizontal.
- El signo del parámetro a determina que la gráfica de $f(x) = \frac{a}{x}$ se ubique en el 1^{o} y 3^{o} cuadrante respecto de las rectas determinadas por las asíntotas si $a > 0$ o se ubique en el 2^{o} y 4^{o} cuadrante respecto de las rectas determinadas por las asíntotas si $a < 0$.

Ejemplo 1:

Graficar la función $f(x) = \frac{1}{x-2} - 4$ determinando previamente su dominio y hallar los conjuntos imagen, de positividad y de negatividad.

Resolución:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 4$$

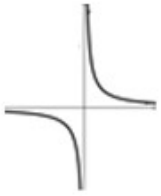
Determinemos el dominio de la función. Este conjunto estará integrado por aquellos valores de x que no anulen el denominador, es decir, los que verifiquen $x - 2 \neq 0$

$$x - 2 \neq 0 \leftrightarrow x \neq 2$$

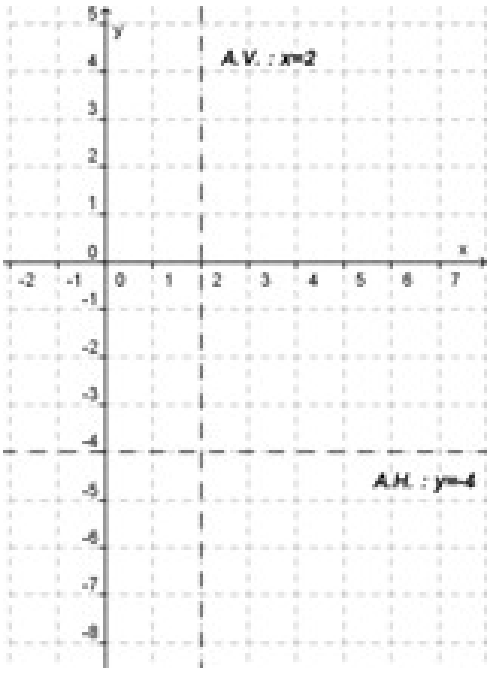
$$Dom \;\; f : \mathbb{R} - \{2\}$$

A partir de los valores de los parámetros, podemos obtener las ecuaciones de las asíntotas

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 4 \quad \begin{cases} a = 1 & \\ x_0 = 2 & x = 2 \;\; \text{A.V} \\ y_0 = -4 & y = -4 \;\; \text{A.H} \end{cases}$$



Ubicamos las asíntotas:



Buscamos las intersecciones con los ejes coordenados:

Intersección con el eje x $(f(x) = 0)$

$$\frac{1}{x-2} - 4 = 0 \to \frac{1}{x-2} = 4 \to 1 = 4(x-2) \to$$
$$\to \frac{1}{4} = x - 2 \to \frac{1}{4} + 2 = x \to \frac{9}{4} = x$$

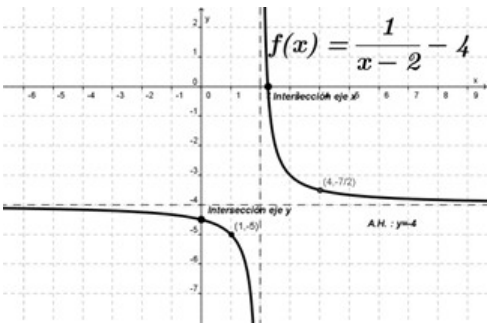
$$\text{Cer } f = \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

Intersección con el eje y $(x = 0)$

$$f(0) = \frac{1}{0-2} - 4 \leftrightarrow f(0) = \frac{-1}{2} - 4 \leftrightarrow f(0) = \frac{-9}{2}$$

$$\left(0; -\frac{9}{2}\right)$$

Ahora, observando el gráfico de referencia y tomando como guía las asíntotas y las intersecciones con los ejes, trazamos el gráfico



Por simple inspección del gráfico podemos determinar algunos conjuntos de interés, tales como los de positividad y negatividad y conjunto imagen.

$$\text{Pos } f = \left(2; \frac{9}{4}\right)$$
$$\text{Neg } f = (-\infty; 2) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$$
$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{-4\}$$

Ejemplo 2:

Graficar la función $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$ determinando previamente su dominio y hallar los conjuntos imagen, de positividad y de negatividad.

Resolución:

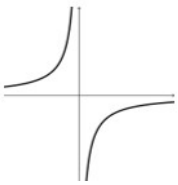
$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$$

Determinemos el dominio de la función. Este conjunto estará integrado por aquellos valores de x que no anulen el denominador, es decir, los que verifiquen $x+1 \neq 0$

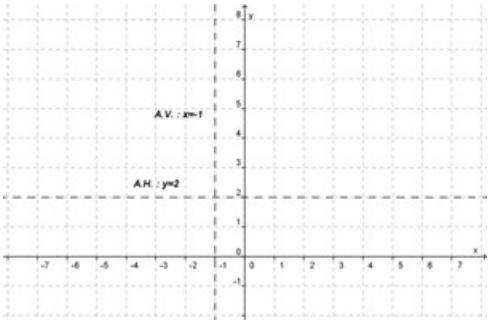
$$x+1 \neq 0 \leftrightarrow x \neq -1$$
$$Dom \;\; f : \mathbb{R} - \{-1\}$$

A partir de los valores de los parámetros, podemos obtener las ecuaciones de las asíntotas

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1} \quad \begin{cases} a = -1 & \\ x_0 = -1 & x = -1 \;\; \text{A.V} \\ y_0 = 2 & y = 2 \;\; \text{A.H} \end{cases}$$



Ubicamos las asíntotas:



Buscamos las intersecciones con los ejes coordenados:

Intersección con el eje x $(f(x) = 0)$

$$2 - \frac{1}{x+1} = 0 \rightarrow \frac{1}{x+1} = 2 \rightarrow 1 = 2(x+1) \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{1}{2} = x+1 \rightarrow \frac{1}{2} - 1 = x \rightarrow \frac{-1}{2} = x$$

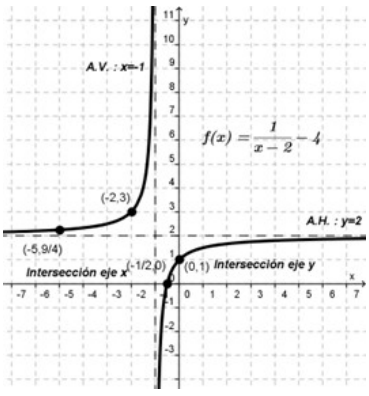
$$\text{Cer } f = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Intersección con el eje y $(x = 0)$

$$f(0) = 2 - \frac{1}{0+1} \rightarrow f(0) = 2 - 1 \rightarrow f(0) = 1$$

$$(0; 1)$$

Ahora, observando el gráfico de referencia y tomando como guía las asíntotas y las intersecciones con los ejes, trazamos el gráfico



Por simple inspección del gráfico podemos determinar algunos conjuntos de interés, tales como los de positividad y negatividad y conjunto imagen.

$$\text{Pos } f = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$
$$\text{Neg } f = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$
$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

Funciones Racionales

Las funciones racionales responden a la expresión

$$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y el dominio de la función, $\mathbb{D}$, es un conjunto tal que $Q(x)$ no se anula en él; esto es,

$$\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Antes de graficar esta función, y en caso que sea posible, se debe simplificar su expresión. Para ello es necesario factorizar ambos polinomios: numerador y denominador. Es importante recalcar que, al simplificar la función **el dominio de la misma no cambia**.

Ejemplo 1:

Dada $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

a) Graficar, determinando previamente el dominio y el conjunto de ceros de f.

b) Determinar los conjuntos de positividad, negatividad e imagen de dicha función.

Resolución:

Determinemos el dominio de la función. En este caso el denominador se anula para $x = 3$, por lo tanto $Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\}$.

Hallemos ahora el conjunto de ceros de f. Es importante en este punto recordar que los ceros de f son **los valores de x que anulan el numerador y pertenecen al dominio de la función, es decir que no anulan, al mismo tiempo, numerador y denominador**.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 0 \leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \leftrightarrow x^2 = 9 \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & \notin Dom\ f \\ x = -3 \end{cases}$$

En este caso $x = 3$ no está en el dominio de f, por ese motivo dicho valor es excluido del conjunto de ceros, en consecuencia $Cer\ f = \{-3\}$.

Intentemos ahora simplificar la función:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

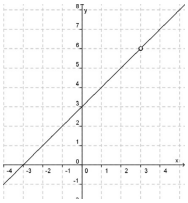
Si $x \neq 3$, entonces

$$f(x) = x + 3$$

Por lo expuesto, la función queda definida como

$$f : \mathbf{R} - \{3\} \to \mathbb{R} / f(x) = x + 3$$

El gráfico será, entonces, aquel de la función $g(x) = x + 3$, pero con un "agujero" en $x = 3$ que evidencie que en dicho punto **la función no está definida**.



Por simple inspección del gráfico podemos determinar algunos conjuntos de interés, tales como los de positividad y negatividad y conjunto imagen.

$$\text{Pos } f = (-3;3) \cup (3;+\infty)$$
$$\text{Neg } f = (-\infty;-3)$$
$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{6\}$$

Ejemplo 2:

Dada $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$

a) Graficar, determinando previamente el dominio y el conjunto de ceros de f.

b) Determinar los conjuntos de positividad, negatividad e imagen de dicha función.

Resolución:

Resolvámoslo de forma análoga al ejemplo anterior. Determinemos el dominio de la función. En este caso el denominador se anula para $x = 2$, por lo tanto $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Hallemos ahora el conjunto de ceros de f. Para esto debemos factorizar el numerador y así llegar a una expresión más simple de f

$$x^3 - 8 = 0 \leftrightarrow x = 2$$

En este caso $x = 2$ no está en el dominio de f, por ese motivo dicho valor no puede ser incluído en el conjunto de ceros.

Aplicamos Ruffini:

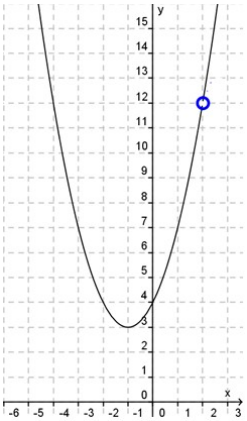
	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

Si $x \neq 2$, entonces

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$



Es fácil ver que la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene solución en los reales, de manera que la función f no tiene ceros.

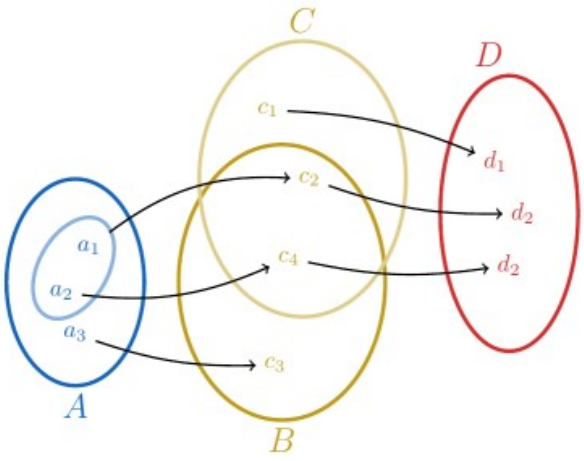
$$f : \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 2x + 4$$

El gráfico será, entonces, aquel de la función $g(x) = x^2 + 2x + 4$, pero con un "agujero" en el punto $(2, 12)$ que evidencie que en dicho punto **la función no está definida**.

Recordando la sección de función cuadrática es posible graficar la función f, teniendo en cuenta concavidad, posición del vértice, eje de simetría e intersección con los ejes.

Composición de funciones

Dadas dos funciones $g : A \to B$ y $f : C \to D$, donde $B \subseteq C$, la composición de f con g: $f \circ g$ (también se nota $f(g(x))$) es la función que le asigna a cada x, el resultado de aplicar f a $g(x)$. Para que esta secuencia pueda realizarse, es necesario que g esté definida en x y que f esté definida en $g(x)$. Dicho de otra forma, la imagen de g debe estar incluida en el dominio de f. Esto puede verse esquemáticamente en la figura de abajo.



En este diagrama se puede ver que el dominio de la función $(f \circ g)(x)$ es el conjunto formado por los elementos a_1 y a_2.

Determinar el dominio de una función compuesta no es tan simple como intersecar conjuntos, hay que tener en cuenta la naturaleza de ambas funciones y calcular los valores de x para los cuales $g(x)$ satisface las condiciones impuestas por el dominio de f. Veamos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Resolución:

En este caso, los dominios naturales de ambas funciones son los reales, de modo que no tendremos que restringir los dominios.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3\end{aligned}$$

En el ejemplo de arriba puede notarse que, en general, la composición no es conmutativa. Esto es, si se cambia el orden en que se hace la operación, cambia el resultado.

Ejemplo 2:

Hallar la composición de las funciones $f(x) = \frac{x}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, realizando restricciones a los dominios en caso de ser necesario.

Resolución:

Antes de efectuar las composiciones analicemos dominio natural e imagen de cada función:

$f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, mientras que $g : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$.

De esta forma vemos que no es necesario realizar restricciones para la composición $f \circ g$, ya que la imagen de g está contenida en el dominio de f. La composición resulta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

Observemos que el dominio de la función compuesta coincide con el de g.

Para hallar la función $g \circ f$, en cambio, será necesario restringir el dominio de f, dado que la imagen de f no está contenida en el dominio de g, es decir $\mathbb{R} - \{1\} \nsubseteq [0; +\infty)$. Debemos entonces redefinir el dominio de f de manera que su imagen coincida con el dominio de g. En este caso, esto sería tomar el conjunto de positividad y el cero de f, o sea, $Dom f = (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x}{x+2}) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

El dominio de la función compuesta es $Dom\ (g \circ f)(x) = (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$.

Veamos con un ejemplo porqué es necesaria esta restricción. Supongamos que queremos calcular la composición evaluada en $x = -1$. El procedimiento sería el siguiente:

$$\text{Primero} \quad f(-1) \quad \text{luego} \quad g(f(-1))$$

Es fácil ver que $f(-1) = -1$, pero entonces $g(f(-1)) = g(-1) = \sqrt{-1}$, que obviamente, no está definido en los reales.

Mirando el diagrama de arriba sería como la relación entre a_3 y c_3, están bien definidas a través de f, pero c_3 no pertenece al conjunto dominio de g.

Funciones Trascendentes

Introducción

Las funciones trascendentes son funciones analíticas que no pueden ser expresadas en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas (suma, resta, división y multiplicación), sino que para definirlas es necesario una cantidad infinita de estas operaciones. Esto se verá más adelante cuando se vea el tema de series de potencias. Estudiaremos tres familias de funciones trascendentes: las exponenciales, las logarítmicas y las trigonométricas.

Función exponencial en base a

Definición: Se define la función exponencial en base $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ a la función $f(x) = exp_a(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, que verifica las siguientes propiedades:

1. $exp_a(0) = 1$
2. $exp_a(1) = a$
3. $exp_a(x+y) = exp_a(x).exp_a(y)$

Al tratarse de una función trascendente no podemos recurrir (en general) a lo que ya conocemos de operaciones algebraicas para evaluar esta función, pero sí podemos hacerlo en ciertos casos particulares, es decir para ciertos valores de x. Para hacer esto observemos que la propiedad 3 tiene interesantes consecuencias, entre ellas que se verifica:

$exp_a(q) = a^q$ cuando $q \in \mathbb{Q}$

Demostremos esa igualdad utilizando la propiedad $exp_a(x+y) = exp_a(x).exp_a(y)$. Tomando $x = b$ y $y = -b$ resulta:

$$exp_a(b).exp_a(-b) = exp_a(0) = 1 \Rightarrow exp_a(-b) = \frac{1}{exp_a(b)} \ \forall b \in \mathbb{R}$$

Evaluando en la propiedad 3 en $x = b$, $y = b$, y luego en $y = 2b$, y así hasta $y = (n-1)b$ con $n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$y = b \Rightarrow exp_a(2b) = (exp_a(b))^2$

$y = 2b \Rightarrow exp_a(3b) = (exp_a(b))^3$

.

.

.

$y = (n-1)b \Rightarrow exp_a(nb) = (exp_a(b))^n \quad [4]$

Luego tomando $b = 1$ obtenemos $exp_a(n) = (exp_a(1))^n = a^n$
Si ahora tomamos $b = \frac{1}{n}$ en [4] se obtiene $exp_a(1) = (exp_a(\frac{1}{n}))^n \Rightarrow a = (exp_a(\frac{1}{n}))^n$

es decir que $exp_a(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$.

Y finalmente tomando $b = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}$ en [4]:

$exp_a(\frac{n}{m}) = (exp_a(\frac{1}{m}))^n = (a^{\frac{1}{m}})^n$

Con esto hemos mostrado que $exp_a(\frac{n}{m}) = a^{\frac{n}{m}}$ con $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow exp_a(q) = a^q$.

Como además vimos que vale

$exp_a(-q) = \frac{1}{exp_a(q)} = \frac{1}{a^q} = a^{-q}$ con $-q \in \mathbb{Q}_{<0}$

entonces vale para cualquier $q \in \mathbb{Q}$.

Significa entonces que la función exponencial coincide con la función potenciación y radicación cuando la evaluamos en números racionales. Por esto, de ahora en más, utilizaremos la misma notación de potencia para la función exponencial $f(x) = exp_a(x) = a^x$ aunque x no sea un número racional, sino para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir en el dominio de las funciones exponenciales, que es $\mathbb{R}$.

Propiedades

También se puede demostrar que cualquiera sea la base $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ las funciones exponenciales son monótonas crecientes ($a > 1$) o son monótonas decrecientes si $0 < a < 1$, con lo cual el gráfico será una curva ascendente de izquierda a derecha para $a > 1$ o una curva descendente para $0 < a < 1$.

Además $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y entonces esa curva quedará dibujada por encima del eje horizontal.

Otra característica útil para graficar estas funciones es que si tomamos valores cada vez más negativos para x, las imágenes de la función se van acercando a 0 cuando $a > 1$. Para ver esta tendencia evaluemos la función exponencial con base $a = 2$, $f(x) = 2^x$ en números enteros negativos:

$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$f(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{1024} = 0{,}0009765625$

Los valores de la función se van acercando a 0 pero nunca llegan a ser iguales a 0. En el gráfico esta propiedad se ve reflejada en la tendencia de la curva, que se va pareciendo cada vez más a la recta horizontal a medida que nos alejamos hacia la izquierda. En el caso que la base sea $0 < a < 1$ esto mismo ocurre pero alejándonos hacia la derecha en el eje horizontal, como se ve reflejado en los gráficos que vienen a continuación. Esta idea será estudiada de manera formal en el tema de límites de funciones.

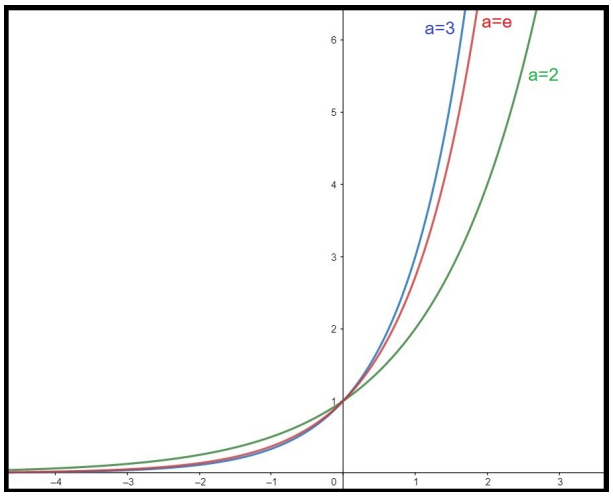
Resumiendo

Las funciones exponenciales se escriben $f(x) = a^x$, con $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

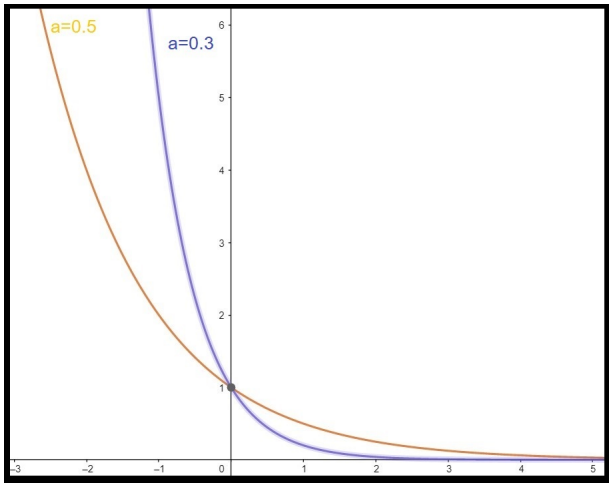
- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$
- $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Si $a > 1$ son funciones crecientes.
- Si $0 < a < 1$ son funciones decrecientes.
- $a^{x+y} = a^x.a^y$ y $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

Gráficos

Con las características descriptas anteriormente podemos mostrar como son los gráficos de las funciones exponenciales para distintas bases a. Mostramos primero ejemplos con bases $a > 1$ para $a = 2$, $a = 3$ y una base particular que llamaremos e sobre la que escribiremos mas en detalle. Por ahora solo adelantar que e es un número irracional y $2 < e < 3$. Los gráficos son:



Y si las bases están entre 0 y 1 obtenemos:



En todos los casos observamos que la imagen de todas ellas es el conjunto $Im = (0, +\infty)$.

De ahora en más cuando mencionemos a la función exponencial, nos estaremos refiriendo por defecto a la que tiene base $a = e$, de lo contrario tendremos que aclarar cual es la base.

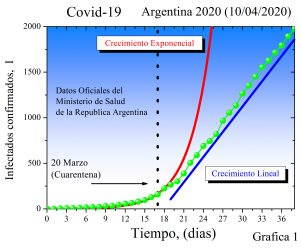
Como mencionamos anteriormente la función exponencial tiene algunas características propias de esta base tan particular. El número e se obtiene como el límite de una sucesión que se estudiará más adelante. El valor aproximado es $e \approx 2{,}71$, sin embargo, recordemos que es un número irracional. Como tarea les dejamos la imagen de abajo, ¡para que memorizen los decimales que ahí se muestran!

Aproximación del número e, con varios decimales

2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823764648042953118023287250981945581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456

Otra propiedad notable es que cuando se extiende el dominio de la función a los números complejos, la función exponencial e^x, es igual a las funciones trigonométricas, seno y coseno, como partes reales e imaginarias.

Crecimiento exponencial



Habrán escuchado a muchas personas que hablan de crecimiento exponencial, y la idea subyacente en la frase es que ese crecimiento es muy rápido. Se habló mucho de esto en la época de la pandemia del año 2020, ya que las funciones exponenciales modelizan la cantidad de contagios de cierto tipo de virus y también el crecimiento de poblaciones de cierto tipo de individuos. En aquella época de pandemia todos los periodistas informaban de un índice r, que cuanto mayor era, más rápido era el contagio, pero si ese coeficiente era menor que 1, no debíamos preocuparnos. Ese índice básicamente es la base de una función exponencial que modela la cantidad de contagios en función del tiempo.

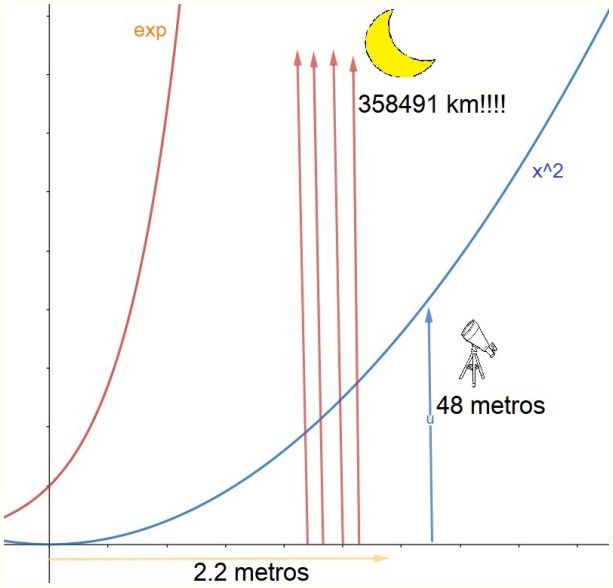
Incluso en ciertas operaciones financieras, como lo son los plazos fijos con intereses compuestos continuamente, también es la función exponencial la que nos dice cuanto dinero obtendremos de ganancia.

Ahora bien, en lenguaje coloquial nos permitimos decir que una cantidad determinada crece rápido, pero para pensar y hablar correctamente tenemos que comparar con algún otro tipo de crecimiento. Por ejemplo, si decimos que la tasa de crecimiento de una colonia de conejos, con dos conejos inicialmente, es rápida, es porque la estamos comparando con la de una colonia de bovinos por ejemplo, con una vaca y un toro inicialmente, ya que los bovinos tienen menos crías y los fetos tardan más en nacer, comparado con el mismo tiempo para la colonia de conejos.

En matemática esta comparación la hacemos con el cociente de dos funciones. Entonces, a modo de ejemplo, cualquier función exponencial crece mucho más rápido que cualquier función polinómica, sin importar cual sea su grado.

Para tener una imagen concreta de este crecimiento desmesurado, esto es en palabras de lo que diría $f(x) = x^2$, un poco enojada, imagínense que en el eje horizontal marcan intervalos de 10 centímetros, y toman 22 de estos intervalos. Llegarían a una distancia de 2.2 metros horizontalmente. Pues bien, la altura del gráfico de $f(x) = x^2$ para esa distancia estaría en unos 48 metros, usando la misma escala para ambos ejes. Pero totalmente indignada nuestra cuadrática observa a e^x muy lejos, ¡tan lejos que la tiene que observar con un telescopio! La función e^x se encuentra más lejos que la luna, a unos 358491 kilómetros. Esta comparación sí nos permite hablar de crecimiento exponencial.

Comparación entre el crecimiento de x^2 y e^x

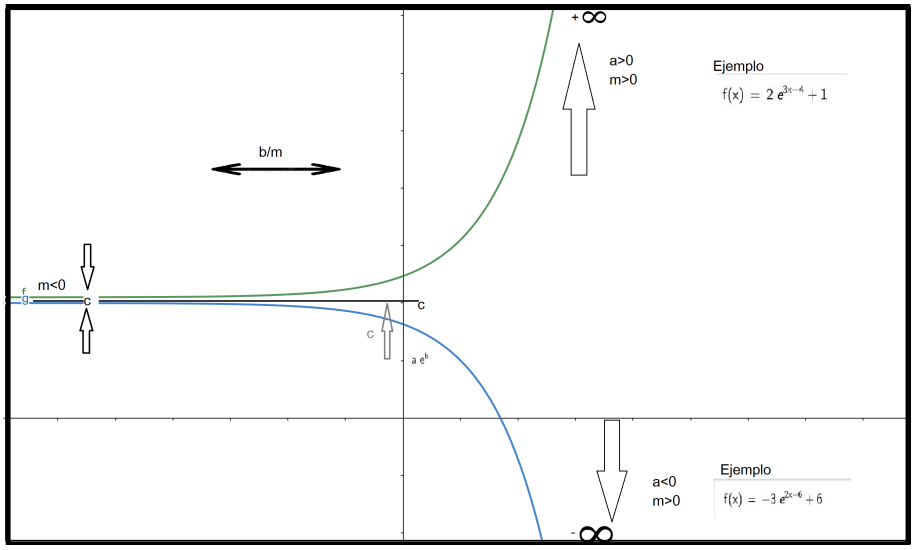


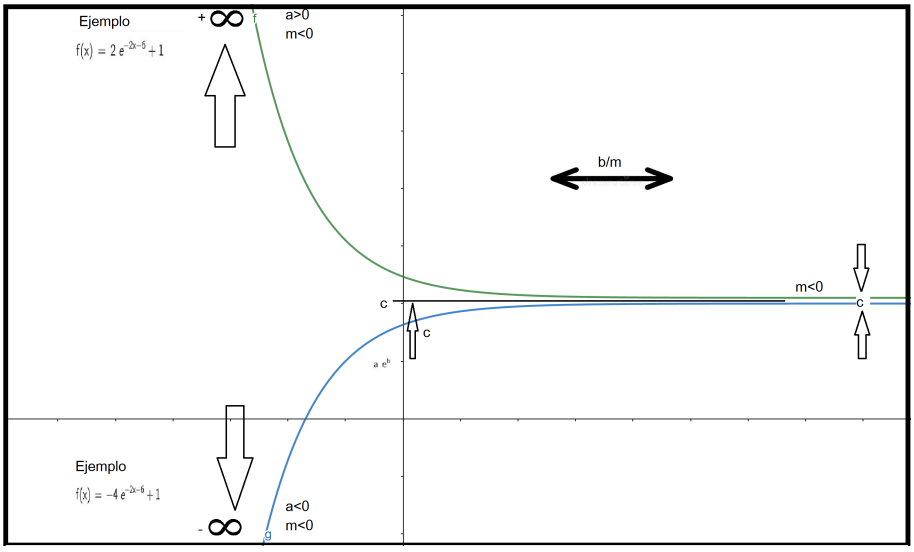
Gráficos de funciones exponenciales compuestas con funciones lineales. Corrimientos.

Cuando se componen las funciones exponenciales con lineales, no cambian las propiedades fundamentales de la función. Si por ejemplo tenemos las funciones $h(x) = mx + b$, $g(x) = ax + c$, $r(x) = e^x$ y componemos $f = g \circ (r \circ h)$, es decir $f(x) = ae^{mx+b} + c$ podemos ver distintos comportamientos de acuerdo los valores de a, m ,b y c.

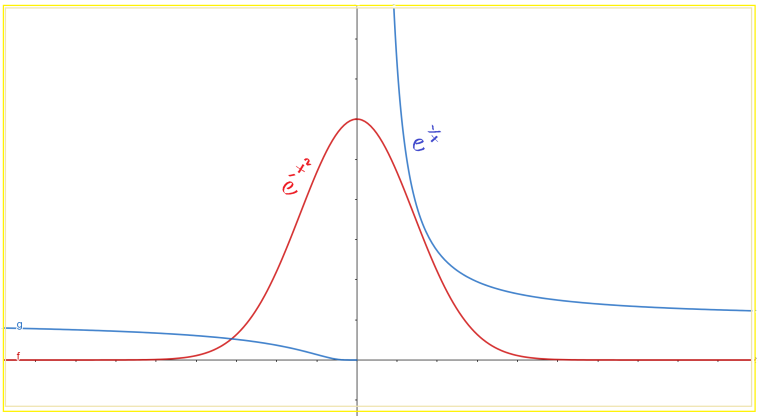
El parámetro c produce un corrimiento vertical del gráfico de la función. Para notar el corrimiento horizontal observemos que $mx + b = m(x + \frac{b}{m})$ y entonces si $\frac{b}{m} > 0$ el gráfico se desplaza hacia la izquierda, y si $\frac{b}{m} < 0$ se desplaza hacia la derecha.

De acuerdo a los valores de a y m la función crecerá o decrecerá más rápidamente, pero cualitativamente no modifica el gráfico. Sin embargo sí hay que estar atentos/as al signo de estos parámetros, porque modifican el comportamiento asintótico. Lo resumimos en los siguientes gráficos:





Ahora si componemos las funciones exponenciales con otro tipo de funciones que no sean lineales, cambian las propiedades de la función compuesta. A modo de ejemplo se muestran los gráficos que resultan de componer una función exponencial con una función cuadrática y con una función homográfica.



Este tipo de funciones las estudiaremos en detalle cuando definamos el concepto de derivada, que nos permitirá analizar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, como así también los extremos de una función.

Problema para pensar

Se tiene inicialmente una colonia de conejos con P_0 individuos. Luego de 2 meses se hace un relevamiento y se observa que hay 20 conejos. Al cabo de 1 año se miden 140 conejos. Suponiendo que el crecimiento de la colonia es exponencial, calcule la población inicial de conejos P_0 y obtenga la función $f(t) = P_0.a^{\frac{t}{mes}}$ que da la cantidad de conejos en función del tiempo medido en meses, y calcule la población luego de dos años. ¿Cuál es la tasa de crecimiento mensual?

Ahora bien, se nos puede plantear el siguiente problema: dada la función $f(x) = e^{3x}$, queremos encontrar x tal que $f(x) = 8$, es decir $e^{3x} = 8$. En este caso el despeje no es el habitual que se hace cuando hay operaciones algebraicas como suma o resta, donde es evidente como despejar. Esto nos da una motivación para definir a la función inversa de las exponenciales.

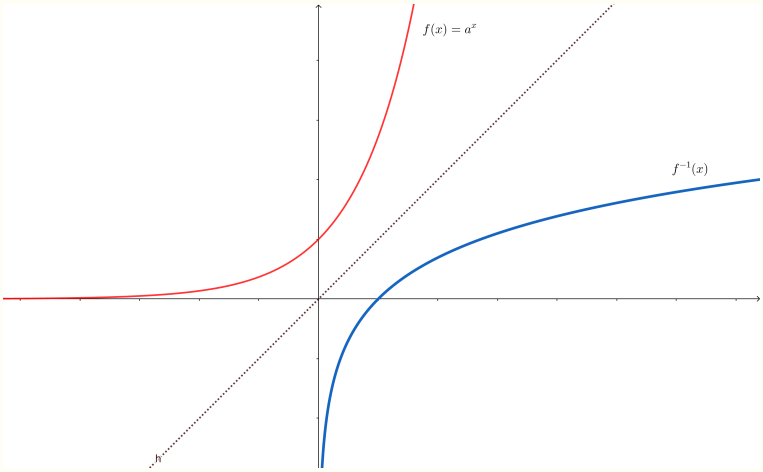
Función inversa de una exponencial en base a: Función Logarítmica

Del gráfico de una función exponencial en base a, se observa que la función $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una función biyectiva y por lo tanto existe su función inversa.

De las propiedades de las funciones inversas, obtenemos que el dominio de f^{-1} es $dom(f^{-1}) = (0, +\infty)$ y que la imagen de f^{-1} es $Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Usando la simetría existente entre los gráficos de f y f^{-1} se obtiene el gráfico de la inversa de una función exponencial en base a.

Gráficos de f y f^{-1}



A esta función inversa se le da el nombre de función logarítmica en base a, y resulta ser otra función trascendente, y se escribe: $f^{-1}(x) = log_a(x)$.

En el caso que la base sea $a = e$, es decir la función inversa de e^x decimos que es el logaritmo natural y se escribe $ln(x)$. Cuando la base es $a = 10$ se lo llama logaritmo decimal $log(x)$, y en cualquier otro caso hay que escribir como subíndice la base. Recordemos que las bases posibles son $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Como se observa en el gráfico, la función $log_a(x)$ toma valores cada vez más negativos, cuando los valores de x se acercan a 0. Es una función creciente cuando la base es $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. Claro que este crecimiento es mucho menor que el de una función exponencial, es más, el crecimiento de una función logarítmica es menor que el de una función lineal.

Propiedades

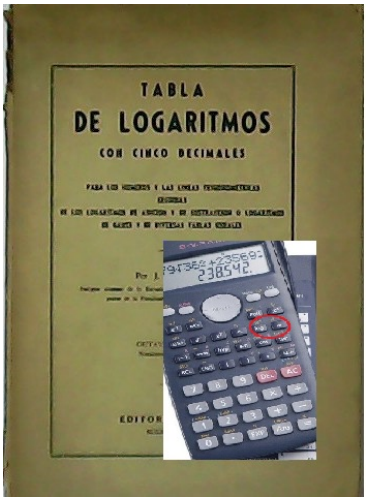
Una de las propiedades de la función f y su inversa $f^{-1}(x)$ es que $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$. Es decir que para el caso que estamos estudiando, esta propiedad se escribe como:

$$a^{log_a(x)} = log_a(a^x) = x$$

Y esta propiedad es la que nos permite despejar en una ecuación que incluya funciones exponenciales o logarítmicas:

$log_a(x) = y \iff a^{log_a(x)} = a^y$. Es decir, $log_a(x) = y \iff a^y = x$.

En algunos casos es posible calcular mentalmente los valores para una función logarítmica, por ejemplo, si la función es $f(x) = log_2(x)$ entonces $f(8) = 3$ ya que $2^3 = 8$. ¿Cuánto vale $f(2)$, $f(1)$ y $f(1/2)$?

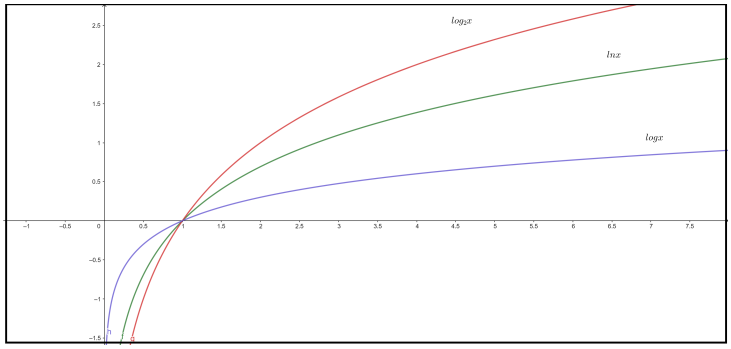


Claro que en general no lo vamos a poder hacer mentalmente, como $log_2(5)$ o $ln(6)$. Antiguamente existían tablas con los valores de ciertos logaritmos, hoy en día hay programas y calculadoras.

Entonces, cuando necesitemos calcular algún valor aproximado de una exponencial o de un logaritmo, podemos recurrir a una calculadora. Usualmente las calculadoras incorporan dos bases, 10 y e, y se acceden a estas funciones a través de las teclas, $log(x)$ y $ln(x)$, y para las exponenciales se accede presionando primero la tecla shift y luego las mencionadas antes. De ser necesario calcular un logaritmo en otra base, se puede utilizar la expresión para el cambio de base que mencionamos en el recuadro "Más propiedades". De todas formas no será necesario en el curso aproximar un valor, sino que los resultados los dejaremos escritos en función de e, por ejemplo, si la respuesta a algún ejercicio es $3e + 1$, queda escrito de esa forma.

Más propiedades

- $log_a(x.y) = log_a x + log_a y$ con $x > 0, y > 0$
- $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$ con $x > 0, y > 0$
- $log_a x^r = r.log_a x$ con $x > 0$
- $log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$ con $x > 0$

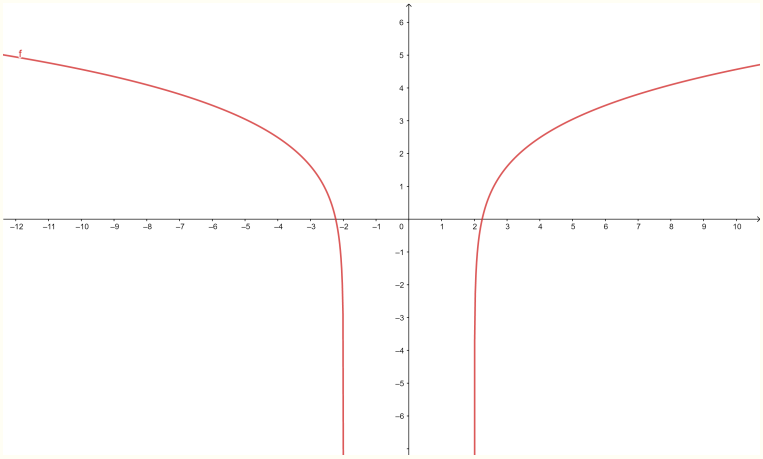


Notemos en estos gráficos de funciones logarítmicas, correspondientes a las bases 2, e y 10, que todos cortan al eje horizontal en $x = 1$, es decir $f(1) = 0$. Además se observa que todas las funciones graficadas cumplen que $f(x) > 0$ para $x \in (1, +\infty)$ y $f(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$, siendo estos intervalos los de positividad y negatividad respectivamente.

Funciones logarítmicas compuestas con otras funciones

A modo de ejemplo analicemos a la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$. Para hallar el dominio de esta función debemos recordar la restricción de las funciones logarítmicas: el argumento debe ser un número positivo, y por lo tanto $x^2 - 4 > 0$ y resolviendo esta inecuación se obtiene que $Dominio(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. El gráfico resulta:

Gráfico de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$



Calular el dominio de las siguiente funciones

- $f(x) = \ln(6x + 3) + 2$
- $g(x) = 2 - \ln(\frac{x}{x-1})$
- $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Cálculo de funciones inversas

- Dada la función $f(x) = 4 - e^{2x+6}$, calcular la función inversa $f^{-1}(x)$ y dar su dominio e imagen.

  Como se vió anteriormente, para calcular la función inversa se plantea $f(x) = y$ y se despeja x en función de y: $4 - e^{2x+6} = y \Rightarrow e^{2x+6} = -y + 4 \Rightarrow \ln e^{2x+6} = \ln(-y + 4) \Rightarrow 2x + 6 = \ln(-y + 4) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(-y + 4) - 3$. Es decir que se obtiene: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(-x + 4) - 3$.

  El dominio de esta función es tal que debe verificarse $-x + 4 > 0$, entonces $Dominio(f^{-1}) = (-\infty, 4)$. Para obtener la imagen usamos que $Imagen(f^{-1}) = Dominio(f) = \mathbb{R}$.

- Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2}{\ln(x+3)-4}$ y dar su dominio e imagen.

  $\frac{2}{\ln(x+3)-4} = y \Rightarrow y(\ln(x + 3) - 4) = 2 \Rightarrow \ln(x + 3) = \frac{2}{y} + 4 \Rightarrow e^{\ln(x+3)} = e^{\frac{2}{y}+4}$

  Es decir que :

  $\Rightarrow f^{-1}(x) = e^{\frac{2}{x}+4} - 3$

  El dominio de f^{-1} es $\mathbb{R} - \{0\}$ y su imagen es $(-3, e^4 - 3) \cup (e^4 - 3, +\infty)$.

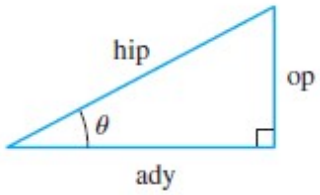
Funciones trigonométricas

Es conocido que el origen de la trigonometría se remonta a hace más de 20 siglos, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para construir triángulos rectángulos. En la actualidad, la rama de la matemática que se ocupa de estos temas es el análisis armónico.

Las funciones trigonométricas nos permiten modelar fenómenos "periódicos" tales como las mareas, las olas del mar, los latidos del corazón, el movimiento de una cuerda de guitarra, las ondas electromagnéticas entre las cuales está la luz, etc.

El desarrollo de esta disciplina permite que ciencia y tecnología se conjuguen para desarrollar instrumentos tales como la radio, la televisión, el radar, el microscopio electrónico y los más modernos instrumentos de diagnóstico por imágenes.

Definiciones



En este apartado recordaremos algunas definiciones trigonométricas para triángulos rectángulos, es decir, donde los ángulos de interés son agudos.

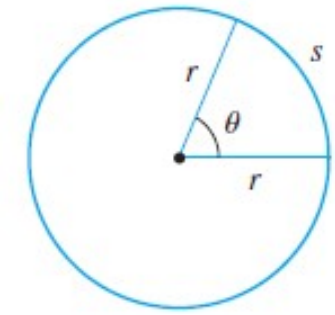
$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{op}{hip} \quad \csc\theta = \frac{hip}{op} \\ \cos\theta &= \frac{ady}{hip} \quad \sec\theta = \frac{hip}{ady} \\ \tan\theta &= \frac{op}{ady} \quad \cot\theta = \frac{ady}{op} \end{aligned}$$

A partir de estas relaciones y el teorema de pitágoras puede deducirse la identidad pitagórica, que usaremos repetidamente durante este capítulo.

$$\begin{aligned} ady^2 + op^2 &= hip^2 \\ \sin\theta &= \frac{op}{hip} \rightarrow op = hip.\sin\theta \\ \cos\theta &= \frac{ady}{hip} \rightarrow ady = hip.\cos\theta \end{aligned}$$

Se deduce

$$cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



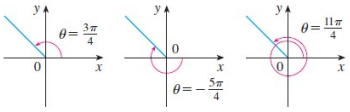
Además del sistema sexagesimal, existe otro sistema para medir ángulos. Aprovechando la relación entre la longitud de arco y el radio de una circunferencia para un ángulo dado, se puede establecer la medida del arco subtendido por ese ángulo; en este caso se dice que el ángulo se mide en *radianes*. Recordemos que la longitud de una circunferencia de radio r es $S = 2\pi r$, entonces, observando la figura donde se muestra un arco de circunferencia de longitud s y radio r que subtiende un ángulo θ y teniendo en cuenta que la longitud de arco es proporcional al ángulo subtendido, se obtiene:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{S} = \frac{s}{2\pi r} \rightarrow s = r\theta$$

Es importante recordar que esta relación es válida únicamente cuando el ángulo θ se mide en radianes.

Es posible entonces, establecer una correspondencia entre ambas formas de medir ángulos en una circunferencia, en la tabla de abajo se muestran algunos ejemplos de interés.

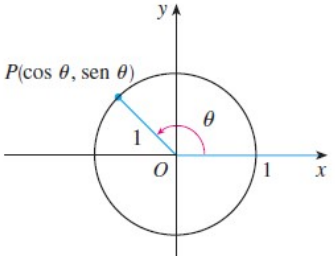
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radiantes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



La posición estándar de un ángulo se representa poniendo el vértice en el origen de un sistema de coordenadas y recorriéndolo en sentido antihorario desde el semieje positivo de las abscisas. En la primera figura puede verse, a modo de ejemplo, el ángulo $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

Si se recorriese en el sentido horario, entonces el ángulo se considerará negativo. Esto se ve en la segunda figura, donde $\theta = \frac{3}{4}\pi - 2\pi$, es decir, $\theta = -\frac{5}{4}\pi$.

También es posible llegar al mismo punto (x, y) del plano dando una cantidad entera de vueltas (tanto en sentido antihorario como horario) a partir de un ángulo dado. En la tercera figura se ve el ángulo que se obtiene al dar una vuelta completa a partir de la posición inicial, o sea, $\theta = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$.



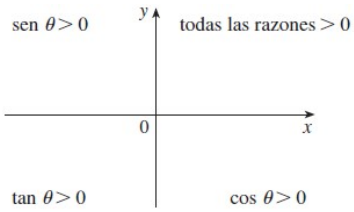
Como dijimos anteriormente, la definición para las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos no aplica para ángulos obtusos o negativos, de modo que para generalizar θ conviene definir la ***circunferencia trigonométrica***. Esta es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio $r = 1$, es decir que satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

El punto $(1;0)$ pertenece a la circunferencia, de modo que, si a partir de este punto comenzamos a recorrer la circunferencia en sentido antihorario, al ubicarnos en un punto $(x;y)$ éste tiene componentes $(\cos\theta\ ;\ \sin\theta)$ donde θ indica la longitud de arco de circunferencia recorrida.

A continuación se detalla una tabla con los valores más representativos de las funciones trigonométricas para distintos ángulos del primer cuadrante.

θ	radianes	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Veamos ahora los signos del seno y el coseno para ángulos en los distintos cuadrantes:



En la figura pueden observarse los signos de las distintas relaciones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes:

$\sin\theta$ toma valores positivos en el 1^{er} y 2^{do} cuadrantes.

$\cos\theta$ toma valores positivos en el 1^{er} y 4^{to} cuadrantes.

También es posible definir un ángulo equivalente a otro dado en el primer cuadrante de la siguiente manera:

$$\theta_{II} = \pi - \theta' \qquad \theta_{III} = \pi + \theta' \qquad \theta_{IV} = 2\pi - \theta'$$

A partir de la circunferencia trigonométrica y las definiciones vistas arriba, podemos definir las *funciones trigonométricas* como aquellas que le asignan a cada número real x, las razones trigonométricas del ángulo x, medido en radianes.

Definición:

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***Periódica*** y su período se indica con $\mathbf{T}$ si satisface

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación:

De acá puede verse el carácter periódico de estas funciones, dado que:

$$(\cos\theta\ ;\ \sin\theta) = (\cos\theta + 2k\pi\ ;\ \sin\theta + 2k\pi)$$

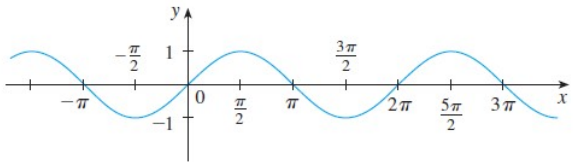
con $k \in \mathbf{Z}$.

Función seno

Para graficar esta función utilizaremos la circunferencia trigonométrica y las definiciones de arriba.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, la ordenada del punto del gráfico $(x, \sin(x))$, se obtiene mirando la ordenada del punto P de la circunferencia. Esto puede hacerse con alguna precisión para los múltiplos enteros o fracciones de π.

En la siguiente gráfica se resume esta información para la función $f = \sin(x)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



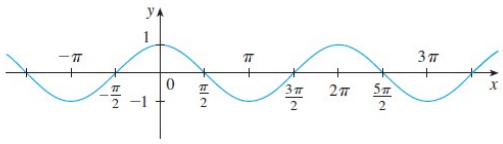
Algunas características que se deducen del gráfico son:

- La imagen es el intervalo $[-1; 1]$, ya que para todo x el punto $P(x)$ pertenece a la circunferencia trigonométrica (que tiene radio igual a uno), por lo tanto su ordenada verifica $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- Es una función periódica de período $T = 2\pi$. Esto nos permite analizar un intervalo, digamos el $[0; 2\pi)$, y extender las conclusiones a todo el dominio natural de la función.
- El valor máximo de la función es $y = 1$ y se alcanza en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- El valor mínimo de la función es $y = -1$ y se alcanza en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los ceros de la función están en $x = 0 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$ y en $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. De forma más sintética pueden escribirse como $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los intervalos de crecimiento, que van de un mínimo al máximo más próximo, tienen la forma $(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los intervalos de decrecimiento, que van de un máximo al mínimo más próximo, tienen la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es positiva en la unión de los intervalos $(2k\pi; (2k + 1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es negativa en la unión de los intervalos $((2k - 1)\pi; 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Función coseno

De la misma forma que hiciésemos para analizar el gráfico de la función seno, para esta función también utilizaremos la circunferencia trigonométrica y las definiciones de arriba. Para cada $x \in \mathbb{R}$, la ordenada del punto del gráfico $(x, \cos(x))$, se obtiene mirando la abscisa del punto P de la circunferencia.

A continuación se muestra un gráfico en el que se resume esta información para la función $f = \cos(x)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Algunas características que se deducen del gráfico son:

- La imagen es el intervalo $[-1; 1]$, ya que para todo x el punto $P(x)$ pertenece a la circunferencia trigonométrica (que tiene radio igual a uno), por lo tanto su abscisa verifica $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Es una función periódica de período $T = 2\pi$. Esto nos permite analizar un intervalo, digamos el $[0; 2\pi)$, y extender las conclusiones a todo el dominio natural de la función.
- Es fácil ver a partir de ambos gráficos que el gráfico del coseno está corrido en $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda del gráfico del seno, es decir $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Este resultado será útil para describir las características del coseno a partir de las descritas arriba para la función seno.
- El valor máximo de la función es $y = 1$ y se alcanza en $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- El valor mínimo de la función es $y = -1$ y se alcanza en $x = (2k + 1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los ceros de la función están en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los intervalos de crecimiento, que van de un mínimo al máximo más próximo, tienen la forma $((2k - 1)\pi; 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los intervalos de decrecimiento, que van de un máximo al mínimo más próximo, tienen la forma $((2k)\pi; (2k + 1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es positiva en la unión de los intervalos $(2k\pi - \frac{\pi}{2}; (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2})$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Es negativa en la unión de los intervalos $((2k - 1)\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi - \frac{\pi}{2})$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ecuaciones trigonométricas

Veamos, a partir de algunos ejemplos, cómo hallar las soluciones de distintas ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 1:

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Resolución:

Una solución la encontramos en la tabla: $x = \frac{\pi}{6}$

Hay otra solución en el segundo cuadrante (ver gráfico con signos según cuadrantes): $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Por lo tanto, la forma general de todas las soluciones en los reales se escribe como

$$S = \{x_I = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ x_{II} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 2:

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Resolución:

Mirando la tabla encontramos que, en el primer cuadrante: $x = \frac{\pi}{3}$

Necesitamos las soluciones negativas, esto es, en el tercer y cuarto cuadrantes (ver gráfico con signos según cuadrantes): $x_{II} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ y $x_{III} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, respectivamente.

Por lo tanto, la forma general de todas las soluciones en los reales se escribe como

$$S = \{x_{II} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ ; \ x_{III} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 3:

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica la ecuación

$$2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

Resolución:

Usemos la sustitución $3x + \frac{\pi}{4} \to \theta$. De esta forma, la ecuación que tenemos que resolver es

$$2\sin(\theta) = \sqrt{2} \to \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La solución para el ángulo agudo es (mirando la tabla), es $\theta_I = \frac{\pi}{4}$. Además, el seno también es positivo en el segundo cuadrante, donde $\theta_{II} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$.

Ahora volvemos a la variable original y despejamos las soluciones asociadas a cada cuadrante.

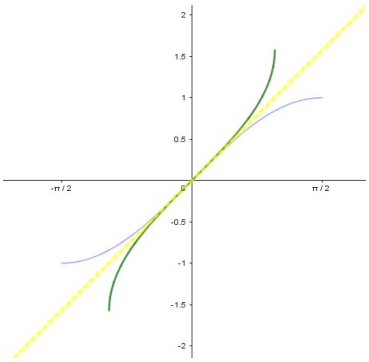
Por lo tanto, la forma general de todas las soluciones en los reales se escribe como

$$S = \{x_I = \frac{2}{3}k\pi \ ; \ x_{II} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Inversas de las funciones seno y coseno

Como se vio en la primera parte de funciones, el gráfico de la inversa se obtiene tomando el simétrico con respecto a la recta $y = x$; de modo que las funciones deben ser biyectivas en todo su dominio.

La función $f(x) = \sin(x)$, con $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ no es biyectiva y, por lo tanto, no admite inversa en ese dominio. De modo que, si se quiere definir una inversa para esta función, tendremos que restringir su dominio. Esto se logra eligiendo cualquier intervalo donde el gráfico de la función sea monótona (creciente o decreciente).



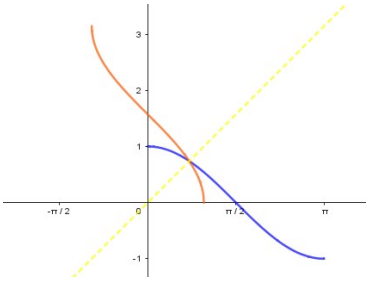
Una posibilidad sería elegir el intervalo $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, donde la función es creciente y toma todos los valores entre $y = -1$ y $y = 1$.

De esta manera, $f(x) = \sin(x)$, con $f : [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$, es una función biyectiva.

Su inversa se dice arco seno y se nota: $f(x) = \arcsin(x)$, con $f : [-1; 1] \to [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Esta función verifica:

$$\arcsin(x) = y \leftrightarrow \sin(y) = x$$



Análogamente, en el intervalo $[0; \pi]$, el coseno es decreciente y toma todos los valores entre $y = -1$ y $y = 1$.

Así, la función $f(x) = \cos(x)$, con $f : [0; \pi] \to [-1; 1]$ admite inversa.

Su inversa se dice arco coseno y se nota $f(x) = \arccos(x)$, con $f : [-1; 1] \to [0; \pi]$

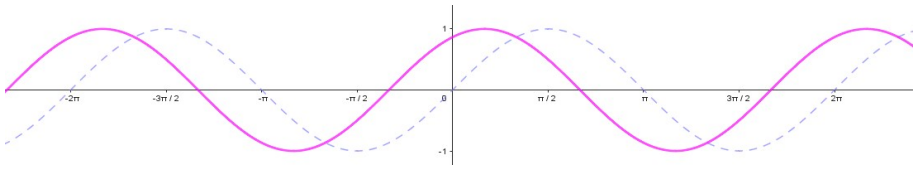
Esta función verifica:

$$\arccos(x) = y \leftrightarrow \cos(y) = x$$

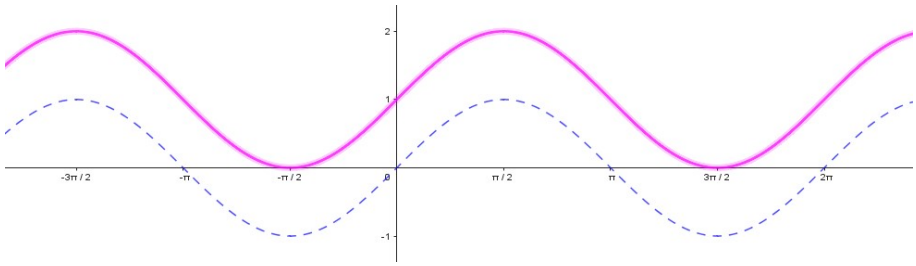
Corrimientos y cambios de escala

Efectuando distintas composiciones pueden obtenerse funciones cuyos gráficos se asemejan a los ya estudiados pero con ciertos corrimientos. Estudiemos qué cambios se producen en el gráfico de la función $f = \sin(x)$ con $f : \mathbf{R} \to [-1; 1]$, al componerla con funciones lineales (idénticas conclusiones valen para la función coseno).

- Sean $g(x) = x + c$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h(x) = (f \circ g)(x)$, entonces $h(x) = \sin(x + c)$. Esta composición produce una traslación del gráfico de f, hacia la izquierda si $c > 0$ y hacia la derecha si $c < 0$. Esta transformación conserva el período y la imagen de f.



- Si $h(x) = (g \circ f)(x)$, entonces $h(x) = \sin(x) + c$. En este caso el gráfico de f se corre hacia arriba si $c > 0$ y hacia la abajo si $c < 0$. Esta transformación conserva el período de f pero $Imh = [c - 1; c + 1]$.



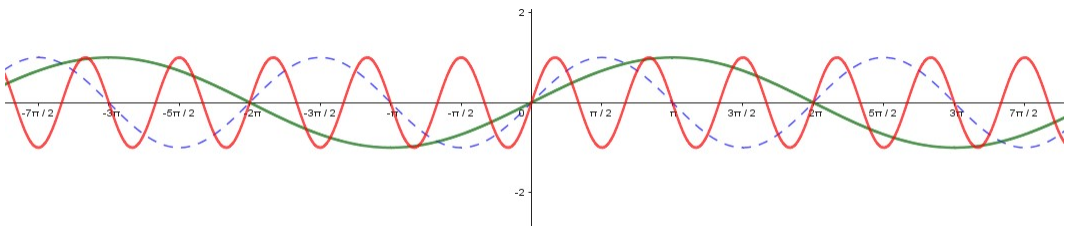
- Si ahora $g(x) = ax$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h(x) = (f \circ g)(x)$, entonces $h(x) = \sin(ax)$.

  Si $|a| > 1$, la composición provoca una "compresión" horizontal del gráfico.

  Si $0 < |a| < 1$, el gráfico se "dilata" horizontalmente.

  Si $a < 0$, además de dilatarse o comprimirse, el gráfico del seno se invierte con respecto al eje de las ordenadas (por ser una función impar), mientras que el del coseno no se altera (ya que es una función par).

  Esta composición mantiene la imagen, pero el período se transforma en $T = \frac{2\pi}{|a|}$. Abajo se muestran composiciones para $a = 3$ (en rojo) y $a = 1/2$ (en verde).



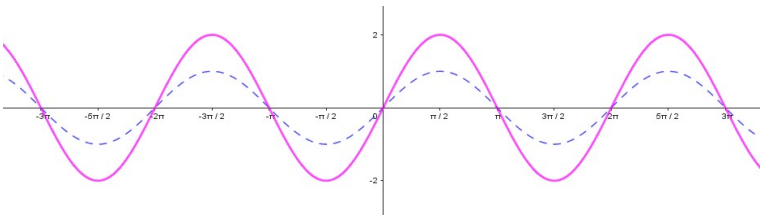
- Si $h(x) = (g \circ f)(x)$, entonces $h(x) = a\,\text{sin}(x)$.

  Si $|a| > 1$, la composición provoca una "compresión" vertical del gráfico.

  Si $0 < |a| < 1$, el gráfico se "dilata" verticalmente.

  Si $a < 0$, además de dilatarse o comprimirse, el gráfico del seno se invierte con respecto al eje de las abscisas.

  Esta transformación conserva el período de f pero $Imh = [-|a|; |a|]$. Se dice en este caso, que la amplitud de la función es a.

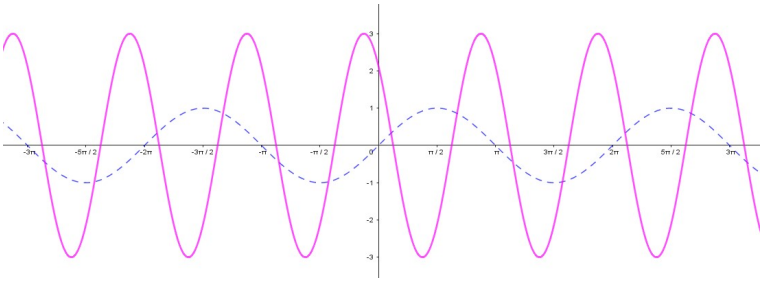


Veamos con un ejemplo, cómo proceder con las distintas composiciones para llegar a la forma más general posible.

Ejemplo 1:

A partir del gráfico de la función $f = \text{sin}(x)$ con $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ y los corrimientos vistos arriba, graficar la función $h(x) = -3\,\text{sin}(2x - \frac{\pi}{4})$. Determinar analíticamente período, imagen y ceros de h.

Resolución: La siguiente figura muestra la función seno (en línea de trazos) y la función h (línea sólida), con todos los corrimientos realizados.

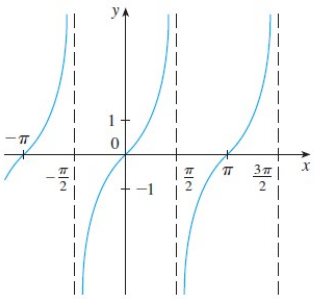


Completando el análisis de las características de h:

- Imagen de h es $Im\ \ h = [-3; 3]$.
- Período $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Ceros de h: habíamos visto que los ceros de la función $f(x) = \text{sin}(x)$ en los reales se pueden escribir como $x = k\pi$, con k entero. Entonces, los ceros de h serán

$$h(x) \leftrightarrow -3\,\text{sin}(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \leftrightarrow (2x - \frac{\pi}{4}) = k\pi \leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

Tangente, secante y cosecante



Definición: Si $x \in \mathbb{R}$ y $\cos(x) \neq 0$, se define $\tan(x)$ (se lee: tangente de x) como:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

El dominio natural de la tangente es $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$; es decir, los reales menos el conjunto de ceros del coseno.

Los ceros de la tangente son los ceros del seno, es decir, $C_0 = \{n\pi\}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

A partir de las funciones seno y coseno, se definen también las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \textit{secante}: \quad & \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ \textit{cosecante}: \quad & \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \\ \textit{cotangente}: \quad & \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

Algunas identidades útiles

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$
- $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$