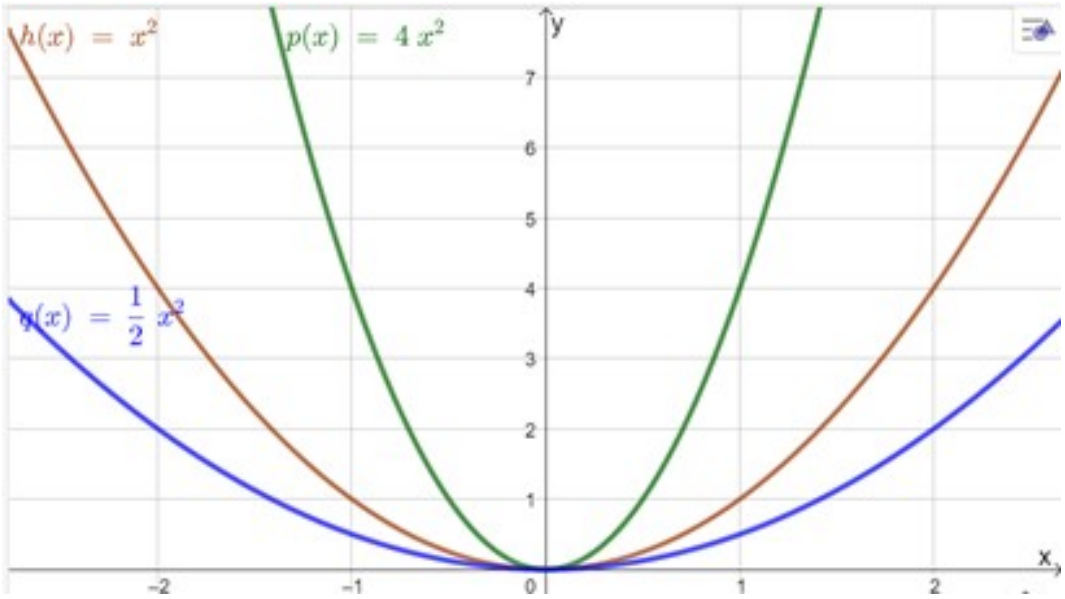
Análisis Matemático A
(Para Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales)

Funciones
Primera Parte



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Lorena Nicolás
Silvina García Serrano
Adriana Cabana
Paula Remesar

Contents

Introducción **2**

Características Generales **2**

Función lineal **10**

Función cuadrática **23**

Introducción

Las funciones son los objetos de estudio fundamentales del análisis matemático. En las siguientes secciones veremos, entre otras cosas, aspectos generales, sus representaciones y la forma de combinarlas. Más adelante, describiremos los distintos tipos de funciones que estudiaremos durante el curso y mostraremos cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos de la naturaleza y la ingeniería.

Características Generales

Definición: Una relación R, del conjunto A en el conjunto B ($R : A \to B$) es cualquier conjunto de pares ordentados $(a; b)$, donde $a \in A$ y $b \in B$.

Definición: Una relación R, de A en B, es función ($f : A \to B$) sí y sólo sí cumple las dos condiciones siguientes:

1. Para todo elemento del conjunto A existe un elemento del conjunto B con el cual forma un par ordenado que pertenece a la relación.

$$\forall x \in A \ \ \exists \ \ y \in B / (x; y) \in f$$

2. Ningún elemento de A puede relacionarse con más de un elemento de B.

$$(x; y) \in f \quad \wedge \quad (x; z) \in f \to y = z$$

Es decir, una relación es función sí y sólo sí, a cada elemento del conjunto de partida (A) le asigna un único elemento del conjunto de llegada (B).

Llamaremos *Dominio* al conjunto de partida (A) y *Codominio* al conjunto de llegada (B). Podemos definir también un subconjunto del codominio, que llamaremos imagen de f (Imf), formado por todos los valores que toman los elementos y del codominio ($y \in B$) como resultado de aplicar la regla f a cada uno de los elementos x del dominio ($x \in A$). Formalmente decimos:

Definición:

$$Imf = \{y \in B / \exists \ \ x \in A / f(x) = y\}$$

En este caso decimos que "$f(x)$ es la imagen de x a través de f".

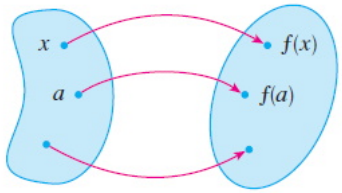
Para nosotros, A y B serán, en general, conjuntos numéricos; es decir, conjuntos de número reales, enteros, naturales, etc . Es habitual que en la descripción de fenómenos observables intervengan magnitudes, algunas de las cuales dependerán de otras. Las funciones numéricas, entonces, proporcionan una manera de cuantificar y describir dicha dependencia; es decir, un modelo para el estudio del fenómeno en cuestión. En este

sentido, además del valor numérico que una función toma en cada punto, es necesario un análisis de las características globales de la función: Dónde crece, dónde decrece, qué tan rápido lo hace. Para esto necesitaremos herramientas que nos permitan representar las funciones resaltando distintos aspectos, por ejemplo, su expresión algebraica o su gráfico.

Representaciones

Existen distintas formas de representar una función, aquí daremos algunos ejemplos de ellas.

Diagrama de Venn:



Una forma de representar funciones es a través de los llamados *Diagramas de Venn*. Estos diagramas representan, en general, una relación entre dos conjuntos. El conjunto de la izquierda representa el dominio (A) y el de la derecha el codominio (B), mientras que las flechas indican cuál es la asignación. Nótese que para que la relación expresada en un diagrama de este tipo sea una función, de cada elemento del conjunto de la izquierda debe salir una y sólo una flecha (esto es, no haber ningún elemento del que no salga una flecha, ni puede haber ninguno del que salgan dos o más). En cuanto al conjunto de la derecha, si revisamos la definición de función, no aplica condiciones sobre el codominio; es decir, a un dado elemento del conjunto de la derecha puede llegarle una, varias o ninguna flecha. Aquellos elementos a los que les llegue al menos una flecha serán elementos del conjunto imagen.

Expresión algebraica:

En este caso se escribe explícitamente la relación que vincula la variable independiente con la dependiente. Por ejemplo, si queremos definir algebraicamente la relación entre el volumen de un cubo de arista x y la longitud de su lado, podemos hacerlo mediante la función volumen, dada por:

$$f(x) = x^3$$

Observación: Siempre que escribamos una función mediante su expresión algebraica y no especifiquemos su dominio, estaremos considerando el conjunto más amplio posible ($A \subseteq \mathbb{R}$) para los cuales la función queda correctamente definida. Llamaremos a este conjunto el *dominio natural* de la función.

Vale notar que tal cosa como el dominio natural dependerá, en muchas ocasiones, del contexto en el que se esté considerando a la función. Veamos esto con el ejemplo del volumen mostrado arriba. Si estamos considerando la función matemática que a cada número lo eleva al cubo, entonces diremos que el dominio natural es todos los reales y lo notaremos $\mathbb{R}$. Sin embargo, si pensamos en el problema de construir cubos con aristas de distintas medidas, no tiene sentido incluir números negativos; diremos entonces que el dominio natural son todos los reales mayores o iguales a cero (también podemos decir los reales no negativos) y lo notamos $\mathbb{R} \geq 0$.

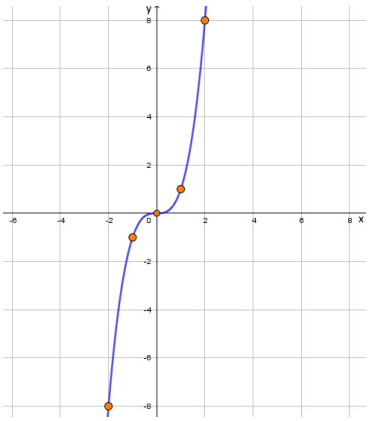
Tabla:

x	f(x)
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

Dada la expresión algebraica de una función, es posible evaluarla para determinados valores específicos de interés y así obtener una tabla de dos columnas. En este caso colocamos los valores que le damos a la variable independiente (x) en la columna de la izquierda y el resultado de la operación matemática correspondiente en columna de la derecha. En la tabla se muestran distintos valores de abscisas para la función $f(x) = x^3$, cuyo dominio natural es $\mathbb{R}$. Los valores sombreados en naranja se corresponden con volúmenes de cubos de distintas arista; en cuyo caso $\mathbb{R} \geq 0$.

Esta representación es particularmente útil como preparación para esbozar su gráfico. Pero hay que tener en cuenta que es, en general, insuficiente la cantidad de información que aporta.

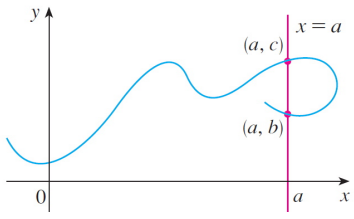
Gráfico:



La representación más eficaz para poder entender el comportamiento global de una función es la gráfica. En esta representación ubicamos dos ejes ortogonales, uno horizontal, donde ubicaremos los elementos del dominio, que llamaremos eje de las *abscisas* y otro vertical, donde pondremos los del codominio, que llamaremos eje de las *ordenadas*. De esta forma, un punto queda determinado especificando sus coordenadas. En la figura se muestra el gráfico de la función $f(x) = x^3$ en azul, mientras que los puntos de la tabla están resaltados en naranja.

Formalmente, definimos el gráfico de una función, como el conjunto de puntos del plano que, referidos a un sistema de eje cartesianos tienen coordenadas $(x; f(x))$ con $x \in A$. Si tomamos los reales como dominio y codominio, entonces

$$\text{graf} f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$$



Así, vemos que el gráfico de una función es una curva en el plano. Sin embargo, podríamos preguntarnos cuáles curvas en el plano representan gráficos de funciones. Una simple prueba basta para obtener la respuesta. Al trazar una recta vertical, ésta debe cortar al gráfico exactamente una vez pues si no lo corta nunca entonces habrá algún elemento del dominio que no esté relacionado con ninguno del codominio y si lo corta más de una vez, entonces habrá un elemento del dominio que esté relacionado con más de uno del domino, como se ve en la figura. Como estas dos situaciones contradicen la definición de función, entonces la recta debe cortar al gráfico una y sólo una vez.

Clasificación de funciones

Como vimos en la sección anterior, la condición para que una relación sea función recae sobre los elementos del dominio. Sin embargo, puede hacerse una clasificación que involucre también, a los elementos del codominio.

Definición:

Decimos que una función es ***sobreyectiva***, sí y sólo sí, el conjunto imagen coincide con el codominio. Es decir,

$$f : A \to B \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow Imf = B$$

En la Fig. 1, se puede ver el gráfico de una función que no es sobreyectiva cuando el codomino es el conjunto de los números reales, es decir, cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, se puede obtener una función sobreyectiva restringiendo el codominio al conjunto imagen, esto es $f : \mathbb{R} \to [1\,;\,+\infty)$.

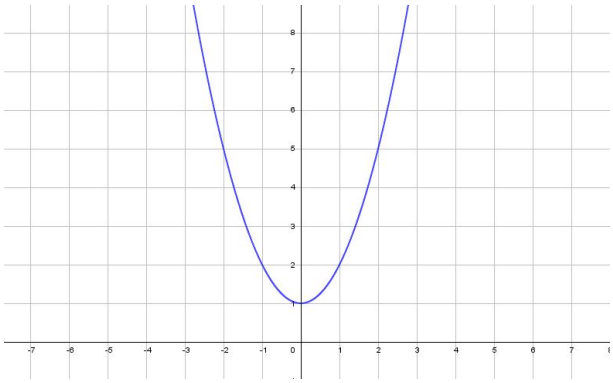


Figure 1: Clasificación de funciones

Definición:

Decimos que una función es ***inyectiva***, sí y sólo sí, cada elemento del codominio, es imagen de un único elemento del dominio. Es decir,

$$f : A \to B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x \in A \wedge \forall a \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Podemos ver que la Fig.1 no respresenta el gráfico de una función inyectiva ya que, por ejemplo, $f(1) = f(-1)$. En este caso, para obtener una función inyectiva tendremos que restringir el dominio. Podríamos definir la función $f : \mathbb{R} \geq 0 \to \mathbb{R}$, lo que en el gráfico se vería reflejado en quedarnos solamente con la rama derecha de la parábola.

Definición:

Decimos que una función es ***biyectiva***, sí y sólo sí, es inyectiva y sobreyectiva.

Nuevamente, mirando el gráfico de la Fig.1, se puede ver que la función que lo representa no es biyectiva. Sin embargo, podemos definir la función $f : \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow [1\ ;\ +\infty)$, cuyo gráfico se ve en la Fig.2

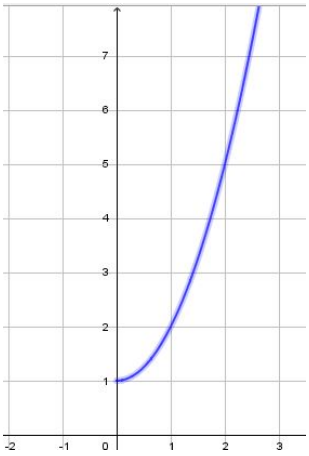


Figure 2: Clasificación de funciones

Función inversa

Si una función es biyectiva, entonces podemos definir su función inversa (f^{-1}), tal que si $f(x) = y$ entonces, $f^{-1}(y) = x$.

Dicho de otra forma, si el punto $(x; y)$ está en el gráfico de la función f, entonces el punto $(y; x)$ pertenece al gráfico de la función $f^{-1}(y)$.

El gráfico de una función y el de su inversa inversa serán entonces simétricos, con respecto al eje $x = y$ (la diagonal punteada amarilla, en la Fig.3)

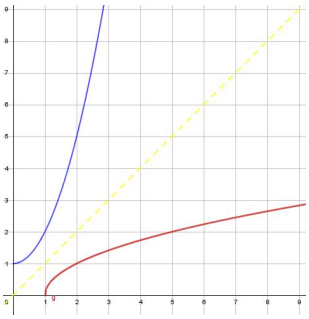


Figure 3: Gráfico de una función y su inversa

En los capítulos que siguen, ejemplificaremos lo expuesto en esta sección con las funciones que se vayan presentando.

Paridad de una función

Definición: Sea $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que f es ***par*** si cumple

$$\forall x \in A \wedge \forall -x \in A : \ f(x) = f(-x)$$

Es decir, elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen. Esta propiedad se traduce gráficamente, como se ve en la Fig.4 en el hecho que la curva que representa a una función par, es simétrica con respecto al $eje\, y$. Esto significa que su gráfico no se ve alterado luego de una reflexión sobre el eje de las ordenadas.

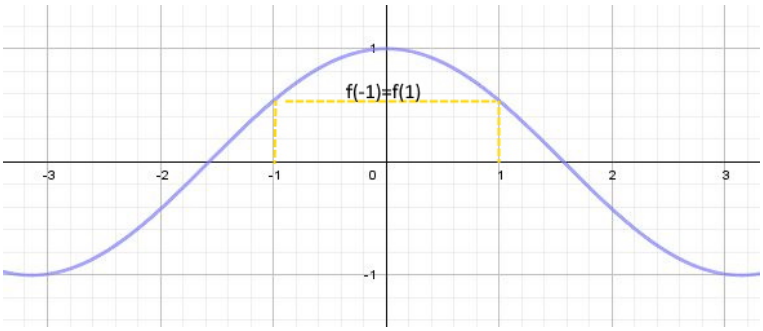


Figure 4: Gráfico de una función par

Definición: Sea $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que f es ***impar*** si cumple

$$\forall x \in A \wedge \forall -x \in A : \ f(x) = -f(-x)$$

Es decir, elementos opuestos del dominio tienen imágenes opuestas. Esta propiedad se traduce gráficamente, como se ve en la Fig.5 en el hecho que la curva que representa a una función par, es simétrica con respecto al origen de coordenadas. Esto significa que su gráfico no se ve alterado luego de una reflexión sobre el eje de las ordenadas y otra sobre el eje de las abscisas.

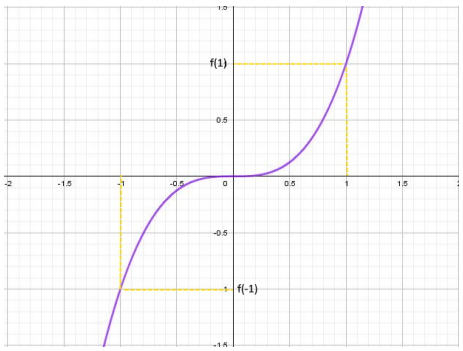


Figure 5: Gráfico de una función impar

Signo de una función

El signo de una función en un punto está determinado por el signo de la imagen. Es decir, dado a en el dominio de f, el signo de la función en a es el signo de $f(a)$.

Con esta idea en mente, podemos extender este concepto a un conjunto de puntos en el dominio de la función, o a todo su dominio.

Definición:

Llamaremos ***Conjunto de positividad*** al conjunto de los elementos del dominio cuyas imágenes son positivas, esto es: $Pos = \{x \in Dom\ f / f(x) > 0\}$. A este conjunto también se lo nota como C^+.

Llamaremos ***Conjunto de negatividad*** al conjunto de los elementos del dominio cuyas imágenes son negativas, esto es: $Neg = \{x \in Dom\ f / f(x) < 0\}$. A este conjunto también se lo nota como C^-.

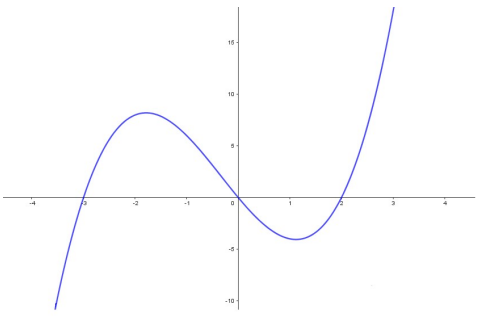
Llamaremos ***Conjunto de ceros*** al conjunto de los elementos del dominio cuyas imágenes son cero, esto es, que intersecan al eje de las abscisas. Entonces,
$Ceros = \{x \in Dom\ f / f(x) = 0\}$. A este conjunto también se lo nota como C^0.

Los gráficos representan una herramienta poderosa para determinar estos conjuntos ya que, según las definiciones que vimos arriba, el conjunto de positividad será el conjunto del dominio para el cual el gráfico de la función se encuentre por encima del eje de las abscisas (en general, el eje x), mientras que para encontrar el conjunto de negatividad habrá que buscar los elementos del dominio que lleven al gráfico por debajo del eje de las abscisas. Por último, los ceros se encuentran donde el gráfico corte al eje de las abscisas.

Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1:

Determinar los conjuntos de positividad, negatividad y ceros de la función representada por el siguiente gráfico:



Resolución:

Tengamos en cuenta que estamos suponiendo (porque no nos dicen lo contrario) que el dominio natural de la función graficada es $Dom\ f = \mathbb{R}$, de manera que la unión de los tres conjuntos (positividad, negatividad y ceros) debe ser el conjunto de los reales.

$C^+ = (-3; 0) \cup (2; +\infty)$
$C^- = (-\infty; -3) \cup (0; 2)$
$C^0 = \{-3, 0, 2\}$

Crecimiento y Decrecimiento de una función

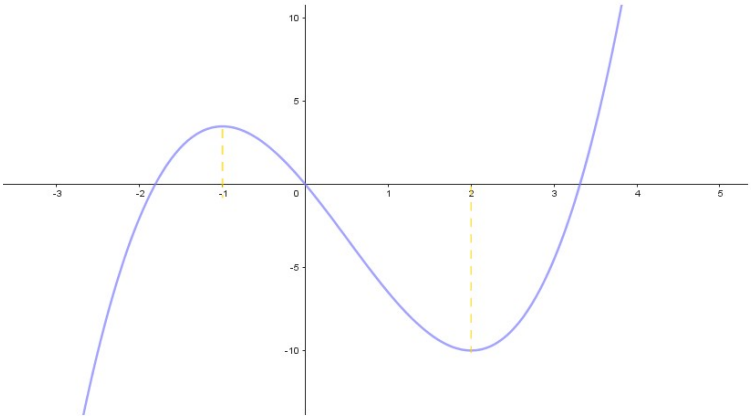
Otra característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en sus gráficos es la ***monotonía***. Cuando al aumentar el valor de x aumenta el valor de y ($y = f(x)$), la gráfica "asciende" y entonces se dice que la función es ***Creciente***. Si al aumentar el valor de x disminuye el valor de y, la gráfica "desciende" y entonces se dice que la función es ***Decreciente***. Y si, al aumentar el valor de x el valor de y permanece constante, la gráfica será un segmento horizontal y entoces diremos que la función es ***Constante***.

Podemos formalizar esto diciendo:

Una función es creciente en un intervalo cuando, dados dos puntos cualesquiera del mismo
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$
será decreciente cuando
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$
y será constante si
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$

Ejemplo 1:

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función representada por el siguiente gráfico:



Resolución:

Podemos ver a partir del gráfico que:
$I \uparrow = (-\infty; -1)$ y $(2; +\infty)$
$I \downarrow = (-1; 2)$

Función lineal

Presentación

Reflexionemos sobre la siguiente situación problemática:

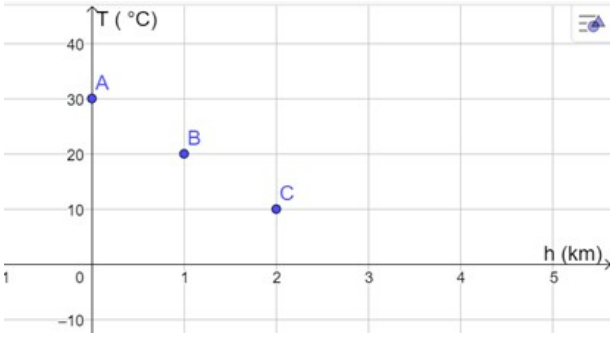
A medida que el aire seco asciende, se expande y se enfría. Si la temperatura en el suelo es de $30 \circ C$ y se sabe que la temperatura desciende $10 \circ C$ por cada kilómetro de altura, nos interesa encontrar la expresión algebraica que nos permita predecir el valor de la temperatura en función de la altura alcanzada. Para ello es necesario precisar el modelo matemático que explica el comportamiento de ambas variables. Sabemos que, si consideramos que en el suelo el valor de la altura es nulo, entonces si h representa la altura en kilómetros y T la temperatura en grados centígrados, entonces para $h = 0$ corresponde T=30. Si la altitud aumenta 1 kilómetro, la temperatura desciende 10 grados, es decir para $h = 0$ corresponde $T = 30 - 10 = 20$. Si la altitud aumenta 2 kilómetros desde el suelo, la temperatura desciende 20 grados, es decir para h=2 corresponde $T = 30 - 2.10 = 10$. De esta manera para una altitud de h kilómetros, la temperatura desciende $10.h$ grados. Por lo tanto, la expresión que describe la temperatura en términos de la altitud es

$$T = 30 - 10h$$

Esta expresión nos permitirá predecir el valor de T dado un h conocido, es decir, podremos responder a los siguientes interrogantes:

- ¿Se podra predecir la temperatura para una altura determinada?
- ¿Para qué altura la temperatura toma un valor dado?

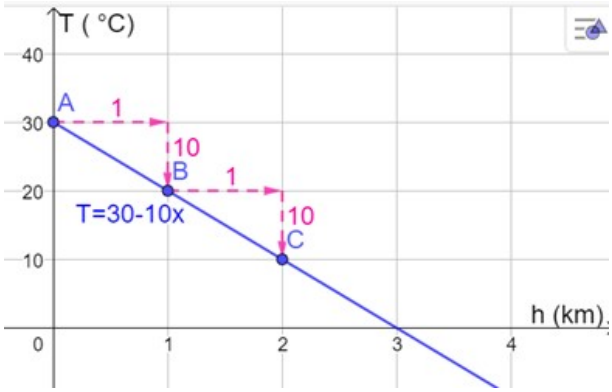
Podemos representar esta relación gráficamente, ubicando los puntos hallados en un gráfico:



Si observamos la representación gráfica de la información, vemos que los puntos están alineados, pudiendo ser unidos por medio de un trazo continuo. Es decir, la gráfica correspondiente es una recta.

Otra forma en que podríamos obtener los mismos puntos es teniendo en cuenta que por cada km que ascendemos, la temperatura disminuye 10 grados.

En cualquiera de los casos si unimos los puntos obtenemos la gráfica de la recta buscada.



Funciones lineales y ecuación de la recta

Una función lineal es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = mx + b$, siendo m y b, números reales.

Vimos que la representación gráfica de la función lineal presentada se corresponde con una recta. Entonces podemos comprobar que:

Observación

La representación gráfica de una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = mx + b$ es una recta no vertical, cuya ecuación explicita es $y = mx + b$. Siendo m y b números fijos que reciben el nombre de parámetros, donde m se la llama pendiente y b ordenada al origen.

Para el ejemplo planteado $m = -10$ y $b = 30$. ¿Qué representa cada uno de estos parámetros? Si nuevamente analizamos el ejemplo anterior podemos ver que:

b=30 representa la temperatura correspondiente a una altura de 0 km es decir la temperatura en el suelo. Gráficamente representa la ordenada del punto donde la recta corta al eje vertical.

m=-10 representa en cuánto varía la temperatura por cada km que aumenta la altitud.

En general, dada la recta y=mx+b

- $m \to$ *pendiente* de la recta: representa cómo varían los valores de la variable dependiente (variable y) por cada unidad que aumenta la variable independiente (variable x).

- $b \rightarrow$ *ordenada al origen*: valor de y que corresponde a x=0, ordenada del punto donde la recta corta al eje vertical.

Tener clara esta interpretación ayuda al momento de graficar.

Representación de la gráfica de una función lineal

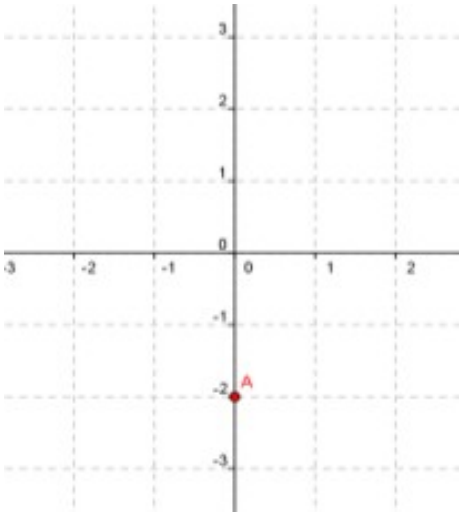
Vamos a ver cómo es posible graficar una recta sin realizar una tabla de valores, recurriendo a las interpretaciones geométricas de m y b.

Ejemplo 1: Representar la función $y = \frac{1}{2}x - 2$

Primero identificamos los valores de pendiente y ordenada.

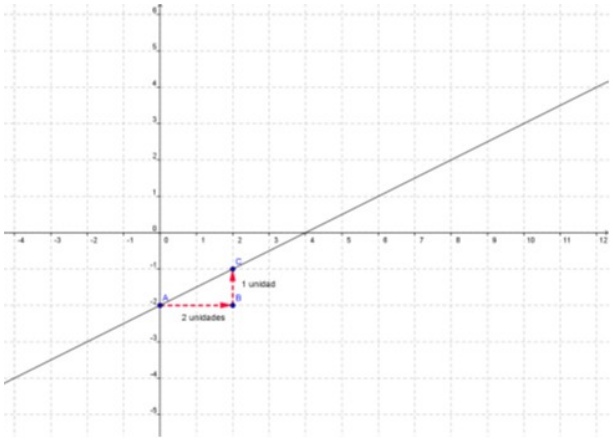
$$y = \frac{1}{2}x - 2 \qquad \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

Vamos a ubicar primero la ordenada al origen, $b = -2$. Como vimos con anterioridad a la ordenada la visualizamos en el corte de la recta sobre el eje y, entonces marcamos en el eje y al punto $(0; -2)$.



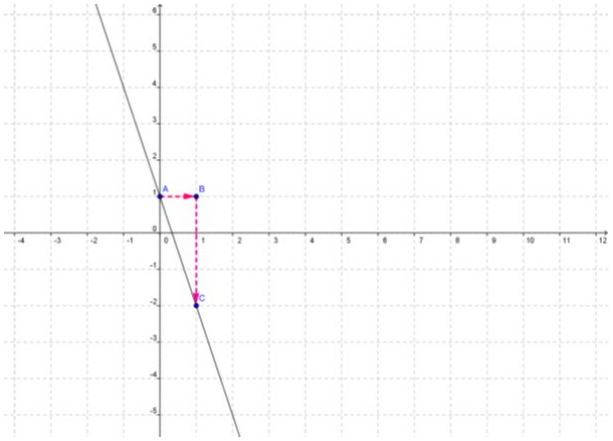
Ahora analizamos la pendiente:

$m = \frac{1}{2}$ Por cada unidad unidad que aumentan las abscisas (valores de x) las ordenadas (valores de y) aumentan en 1/2. Esta idea es equivalente a pensar que cada 2 unidades que aumentan las abscisas las ordenadas aumentan en 1 unidad. Luego a partir del punto A realizamos el recorrido que indica la pendiente, es decir dos unidades hacia la derecha y una hacia arriba, obteniendo un nuevo punto que está sobre la recta (Punto C del gráfico). Unimos los dos puntos y obtenemos la gráfica de la recta buscada.



Ejemplo 2: Vamos a representar la función $f(x) = -3x + 1$

Ubicamos primero la ordenada al origen ($b = 1$), luego, a partir de la misma tomamos 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo. Veamos:

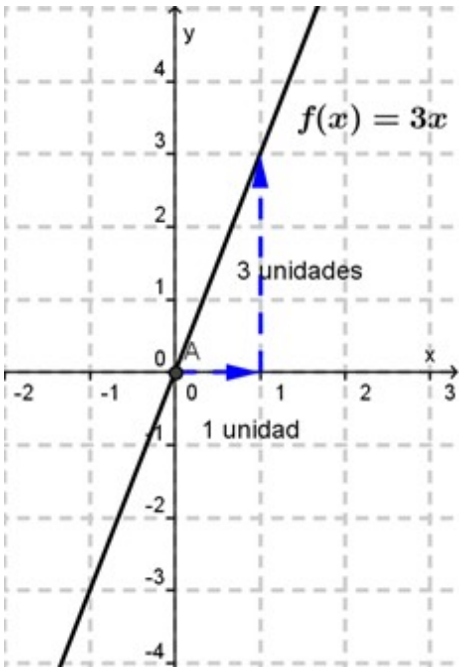


Vemos entonces que las interpretaciones propuestas nos conducen a pensar en la pendiente como cociente de incrementos, es decir:

$$m = \frac{Variacion\ de\ las\ ordenadas}{Variacion\ de\ las\ abscisas}$$

Entonces, si tuviésemos que graficar una función lineal con ecuación $y = 3x$, procederíamos de la siguiente manera:

A partir del origen de coordenadas, tomamos 1 unidad a la derecha y luego 3 hacia "arriba".

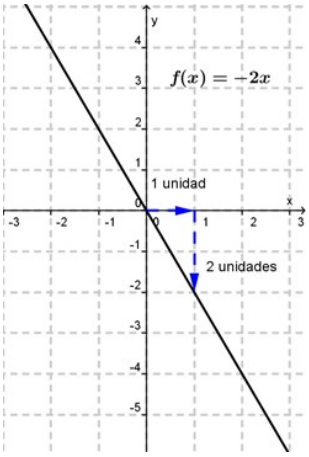


Es decir, a la pendiente la pensamos de la siguiente manera:

$$m = \frac{3}{1} = \frac{Variacion\ de\ las\ ordenadas}{Variacion\ de\ las\ abscisas}$$

Ejemplo 3:

Si la recta tuviera como ecuación $y = -2x$, su gráfica seria de la siguiente manera:

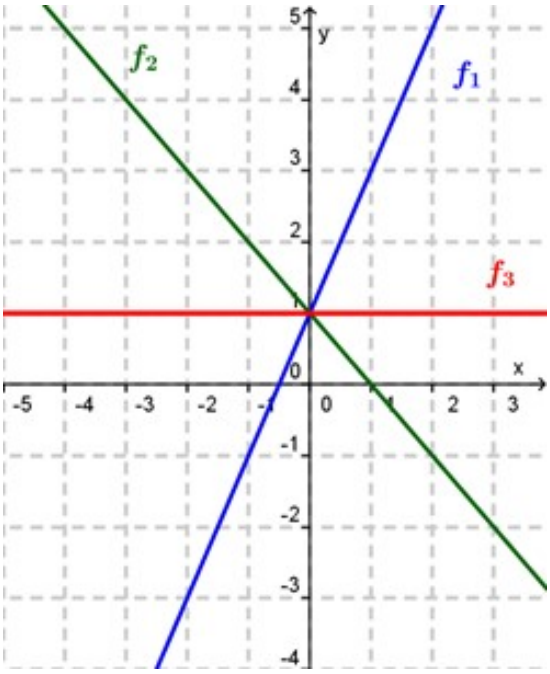


Variaciones de m:

Vamos a representar en un mismo sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones lineales:

$$f_1(x) = 2x + 1; \quad f_2(x) = -x + 1; \quad f_3(x) = 1$$

Veamos que la característica que tienen en común las tres rectas es que la ordenada es igual a 1. En la primera función la pendiente es positiva ($m = 2$), en la segunda es negativa ($m = -1$) y en la tercera la pendiente es nula ($m = 0$). Vamos a observar en un gráfico cartesiano qué efecto causa esta variación de parámetros:



Vemos que en f_1 donde la **pendiente es positiva**, a medida que las abscisas aumentan también lo hacen las ordenadas. En estos casos decimos que la función es creciente.

Vemos que en f_2, en donde la **pendiente es negativa**, a medida que las abscisas aumentan las ordenadas disminuyen. En este caso decimos que la función es decreciente.

Vemos que en f_3, en donde la **pendiente es nula**, cualquiera sea el valor de x, las ordenadas no varían. En este caso decimos que la función es constante.

Resumiendo

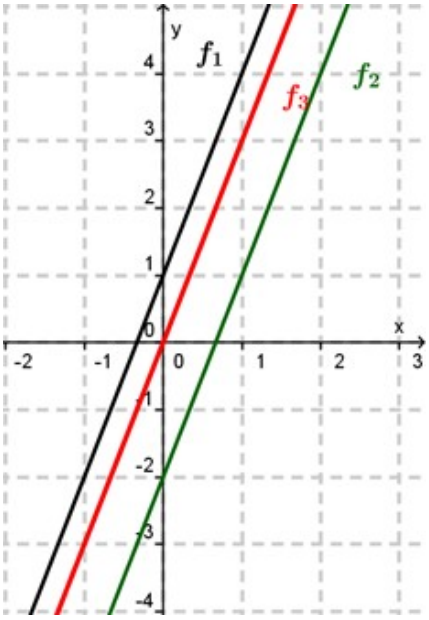
El parámetro m determina la inclinación de la recta.

- Si $m > 0$, a mayor abscisa corresponde mayor ordenada. Se trata de una función creciente.
- Si $m < 0$, a mayor abscisa corresponde menor ordenada. Se trata de una función decreciente.
- Si $m = 0$ para cualquier valor de abscisa la ordenada no cambia. Se trata de una función constante.

Variaciones de b:

Vamos a representar en un sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones lineales:

$$f_1(x) = 3x + 1; \quad f_2(x) = 3x - 2; \quad f_3(x) = 3x$$



Si observamos las ecuaciones de las rectas presentadas, se puede observar que la característica que tienen en común las tres rectas es que poseen la **misma pendiente** (m=3).

¿Qué observamos en el gráfico? Vemos que las rectas son paralelas.

Entonces:

Condición de paralelismo

Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si sus pendientes

Pero bien, siguiendo con la interpretación de la ordenada al origen. En el dibujo se puede ver que:

La recta f_1 corta al *eje y* en $y = 1$, es decir que el gráfico de la función pasa por el punto de coordenadas $(1; 0)$.

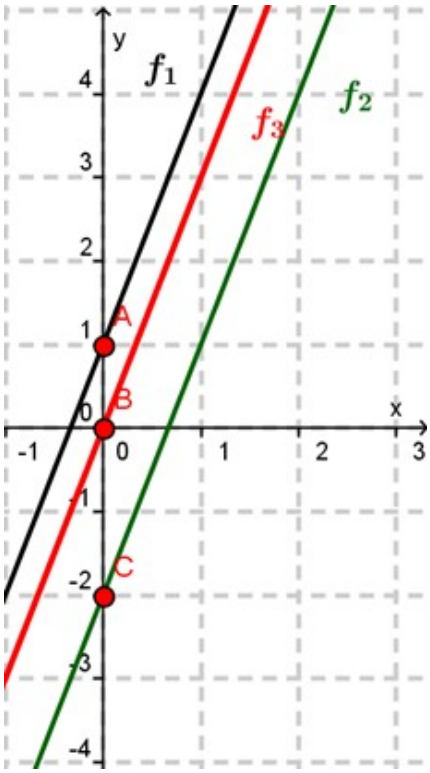
La recta f_2 corta al *eje y* en $y = -2$, es decir que el gráfico de la función pasa por el punto de coordenadas $(-2; 0)$.

La recta f_3 corta al *eje y* en $y = 0$, es decir que el gráfico de la función pasa por el punto de coordenadas $(0; 0)$.

Podemos generalizar, entonces, diciendo: Las rectas cortan al *eje y* en un punto cuya ordenada es igual al término independiente b.

Interpretación geométrica

La ordenada al origen es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.



Resumiendo

- El parámetro b (ordenada al origen) determina la ordenada del punto de intersección de la recta con el *eje* y.
- Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.
- Las variaciones que se dan en b generan un desplazamiento de la recta hasta el punto del *eje* y cuya ordenada es b.

Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

En la Fig.6 se muestra un ejemplo de rectas perpendiculares: $y = 2x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$

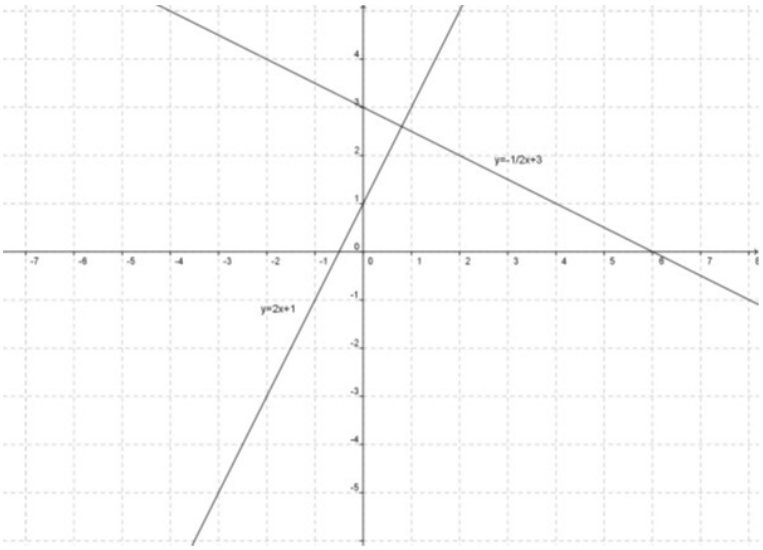


Figure 6: Condición de perpendicularidad

Ahora vamos a trabajar sobre como encontrar ecuaciones de rectas conociendo distintos conjuntos de datos.

Caso 1: Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente conocida.

Pensemos en la siguiente situación: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P = (1; -2)$ y tiene pendiente igual a -3.

Sabemos que la ecuación explicita de la recta se escribe como $y = mx + b$, donde $m = -3$, entonces:

$$y = -3x + b$$

Ahora vamos a usar el otro dato: un punto P que pertenezca a la recta. Recordemos que si un punto pertenece al gráfico de la función, debe verificar su ecuación. ¿Qué quiere

decir, entonces, que un punto pertenece a la recta? Que cuando reemplazamos los valores de x e y en la ecuación por 1 y -2 respectivamente, la igualdad se verifica. Es decir:

$$-2 = -3.1 + b$$

Ahora solo nos queda despejar b, que es el parámetro desconocido

$$-2 + 3 = b \text{ entonces } b = 1$$

Con lo cual la ecuación de la recta resulta ser

$$y = -3x + 1$$

Caso 2: Ecuación de la recta que pasa por un punto y es perpendicular a otra recta dada.

Estudiemos la siguiente situación: Queremos obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (-1, 2)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y - 5x = 3$. Como la recta buscada debe ser perpendicular a la recta dada, su pendiente debe ser inversa y opuesta a ésta. Despejamos de esta última ecuación la variable y para obtener el valor de la pendiente de esta recta, es decir: $y = 5x+3$ La pendiente de la recta buscada corresponde al valor inverso y opuesto de 5, resulta ser entonces $m = -\frac{1}{5}$ Sabemos entonces que la ecuación de la recta buscada será de la forma:

$$y = -\frac{1}{5}x + b$$

Ya tenemos la ecuación, ahora el punto $(1; -2)$ debe verificar dicha ecuación, entonces:

$$2 = -\frac{1}{5}(-1) + b$$

despejamos b y resulta $b = \frac{9}{5}$, de manera que la ecuación de la recta buscada será:

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

Caso 3: Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene ordenada al origen conocida.

Esta situación es muy parecida a la anterior. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P = (-1; -1)$ y tiene como ordenada al origen 5. Sabemos que la ecuación explicita es $y = mx + b$, donde b= 5, entonces:

$$y = mx + 5$$

Ahora usamos el dato del punto perteneciente a la recta, entonces reemplazamos sus coordenadas en la ecuación anterior:

$$-1 = m(-1) + 5$$

Ahora nos resta despejar m de la ecuación anterior:

$$(-1-5)/(-1) = m, \text{ entonces } m = 6$$

Con lo cual la ecuación de la recta resulta ser

$$y = 6x + 5$$

Caso 4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

En este caso queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$. Vamos a visualizar los puntos en el gráfico de la Fig.7

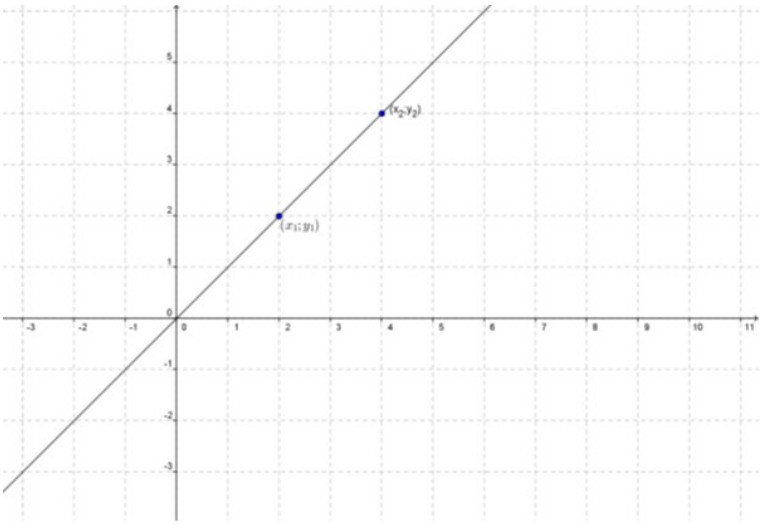


Figure 7: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si recordamos nuestra definición de pendiente vemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ donde } x_2 \neq x_1$$

Entonces:

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x + b \tag{1}$$

con lo cual ahora el parámetro a determinar es b. ¿Qué hacemos?

Tomaremos uno de los dos puntos que tenemos a disposición. ¿Cuál de ellos? Cualquiera, con cualquiera de los dos que disponemos podremos hallar el valor de b, veamos: Tomaremos $(x_1; y_1)$ y lo reemplazamos en la ecuación (1) y de esta ecuación despajaremos b, entonces:

$$y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 = b$$

Es así que quedan determinados los parámetros de la recta, m y b.

Ejemplo 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P = (-1; 2)$ y $Q = (2; 3)$

Como aclaramos en el apartado anterior, primero vamos a conseguirnos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{3-2}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

Remplazamos este valor en la ecuación de la recta:

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

Ahora vamos a hallar b, usando cualquiera de los puntos dados: Usaremos $P = (-1; 2)$, Así

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{3}(-1) + b \\ 2 + \frac{1}{3} &= b \\ \frac{7}{3} &= b \end{aligned}$$

Con esta información podemos armar la ecuación de la recta:

$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$

Verificación: ¿Podremos chequear si los desarrollado es correcto?

Los puntos propuestos deben pasar la recta hallada, veamos: ¿$P = (-1; 2)$ pertenece a la recta? $2 = (1/3)(-1) + 7/3$, efectivamente se verifica que $2 = 6/3$. ¿$Q = (2; 3)$ pertenece a la recta? $3 = (1/3)(2) + 7/3$ efectivamente se verifica que $3 = 9/3$.

Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto:

A partir de la ecuación vista para la pendiente podemos deducir una expresión para la recta conociendo el valor de la pendiente y un punto. Sea m la pendiente de una recta que pasa por el punto $A = (x_1; y_1)$, para cualquier punto $(x; y)$ de la recta, con $x \neq x_1$, se verifica:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Si ahora despejamos la variable obtenemos:

Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto por el que pasa

$$y = m\,(x - x_1) + y_1$$

Para el ejemplo anterior, luego de hallada la pendiente $m = \frac{1}{3}$ y considerando el punto $P = (-1, 2)$ podemos, a partir de la expresión anterior, decir que la ecuación de la recta buscada es:

$$y = \frac{1}{3}\,(x - (-1)) + 2$$

Lo cual si hacemos las distributivas nos llevará a la ecuación ya encontrada con anterioridad:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Rectas verticales y horizontales

Recordemos que si $m = 0$ la recta resulta horizontal, con lo cual las ecuaciones del tipo $y = b$, resultan ecuaciones de rectas horizontales.

Ahora bien, ¿Qué pasa con las ecuaciones de rectas verticales?

Habiamos visto que, como se muestra en la Fig.8, en las rectas horizontales para cualquier valor de x, y es fijo y siempre vale b. Por ejemplo: $y = 5$

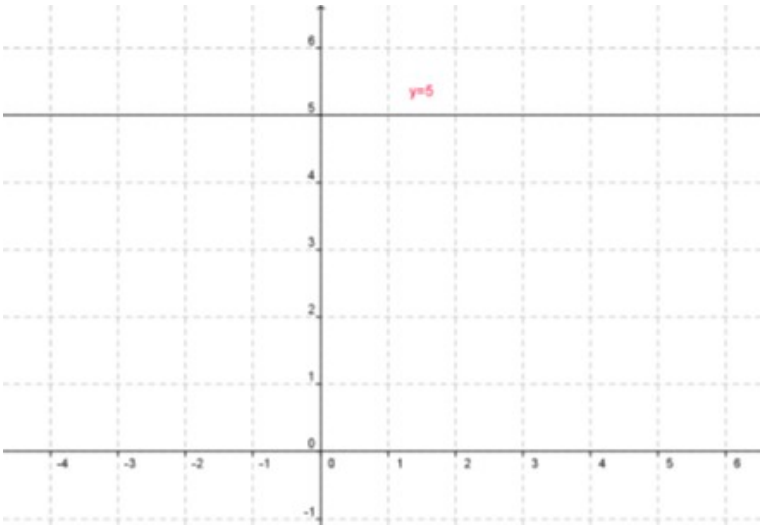


Figure 8: Ecuación de una recta horizontal

¿Qué pasa con las ecuaciones de rectas verticales?

Recordemos que los gráficos de funciones lineales son rectas no verticales, con lo cual, su expresión algebraica no se corresponde con la expresión algebraica de una función.

El comportamiento de las rectas verticales es el siguiente: para distintos valores de y, x se mantiene constante, veamos esto en la Fig.9:

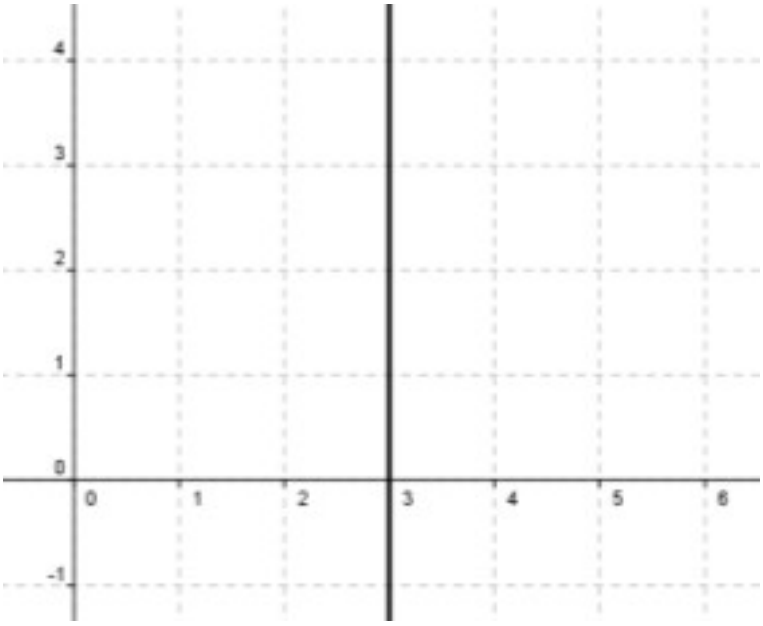


Figure 9: Ecuación de una recta vertical

Observemos que, para cualquier valor de y, el valor de x se mantiene fijo en 3, entonces la ecuación será $x = 3$.

Resumiendo

- Ecuación de una recta horizontal que pasa por el punto de ordenada b: $\mathbf{y = b}$
- Ecuación de una recta vertical que pasa por el punto de abscisa a: $\mathbf{x = a}$

Ejemplo 1:

Obtener la ecuación de la recta horizontal que pasa por $A = (1, 3)$.

Este ejercicio puede resolverse sin procedimiento algebraico ya que si debe ser horizontal tiene que tener pendiente nula y luego si debe pasar por el punto $A = (1, 3)$ y ser horizontal, sus puntos irán modificando la x pero mantendrán la ordenada 3, por lo tanto pasará por el eje y, intersecándolo en 3, ordenada al origen 3, $b = 3$. Así resulta la ecuación $y = 0x + 3$ o bien $y = 3$

Ejemplo 1:

Supongamos ahora que nos proponemos obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (3; 1)$ y $B = (3; 5)$. Si intentáramos pensar en calcular la pendiente, nos encontraríamos con una división no definida, puesto que en el denominador, la variación de x resultaría ser 0. Si analizamos ahora el ejemplo gráficamente, la recta pretendida se representa como muestra la Fig.10:

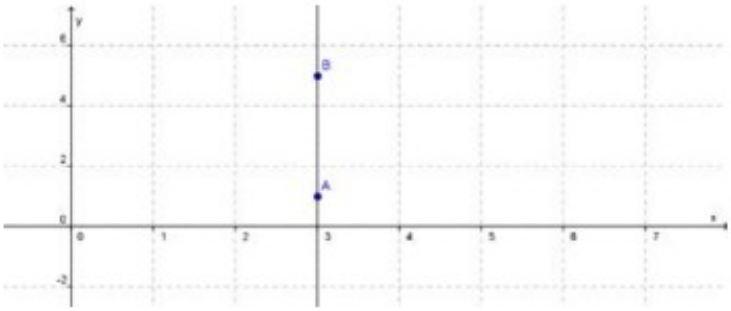
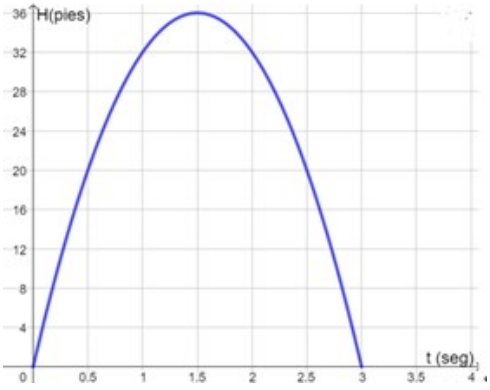


Figure 10: Dos puntos de una recta vertical

Pensemos entonces en el comportamiento de esta recta y de los puntos que conforman esta recta. En ella los puntos van cambiando el valor de su segunda coordenada, la coordenada y pero mantienen constante en 3 su valor de abscisa. Por esto la ecuación $x = 3$ es la que identifica a estos puntos.

Función cuadrática

Presentación



Si se lanza un proyectil directamente hacia arriba, su altura (en pies) después de t segundos está dada por la función: $H(t) = -16t^2 + 48t$, cuyo gráfico es el de la izquierda. Analizar dicho gráfico y responder ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil y en qué momento la alcanza?

Para responder al ejercicio planteado bastará analizar el gráfico de la función dada... La altura máxima es de 40 pies y se alcanza a los 1.5 seg después del lanzamiento. ¿Se imaginan haber resuelto el mismo problema si no contáramos con el gráfico?

En esta unidad estudiaremos a las funciones cuadráticas. Aprenderemos a reconocer las distintas formas en que se puede presentar su fórmula y veremos cómo graficarla en cada caso.

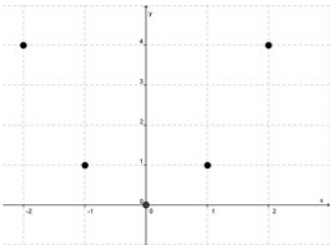
Características generales

Forma polinómica

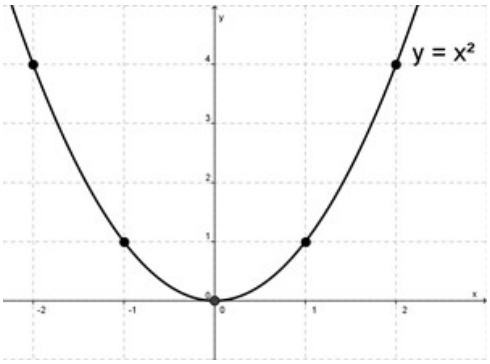
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{donde} \quad a,\ b\ ,\ c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$$

Como lo muestra la definición el dominio de una función cuadrática son los números reales. Su gráfica es una curva llamada parábola. Para recordar su forma realizaremos el gráfico de $f(x) = x^2$, para lo cual nos ayudaremos con una tabla de valores y luego volcaremos los datos en un plano cartesiano:

x	$y = x^2$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
-1	$(-1)^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
-2	$(-2)^2 = 4$



Si ahora unimos los puntos:

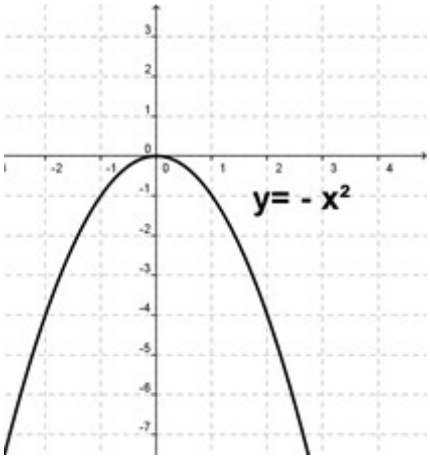


De la observación del gráfico podemos destacar:

- La simetría del gráfico respecto de la recta $x = 0$ (eje de simetría).
- El gráfico presenta un mínimo en $x = 0$, el punto del gráfico correspondiente a dicho mínimo coincide con el punto de intersección del gráfico con el eje de simetría. Este punto recibe el nombre de vértice de la parábola, en este caso dicho punto tiene coordenadas $(0, 0)$.

Realicemos ahora el gráfico de la función $f(x) = -x^2$

Podemos observar que al cambiar signo del parámetro a la gráfica invierte su concavidad, es decir, mientras que en el caso anterior las ramas iban hacia arriba (parábola cóncava positiva), ahora las ramas van hacia abajo (parábola cóncava negativa).



El signo del parámetro a, coeficiente de , determina que las ramas vayan hacia arriba o hacia abajo, es decir que la parábola sea cóncava positiva o negativa respectivamente

Para realizar el gráfico de una función cuadrática dada en forma polinómica es importante saber identificar: la concavidad de la parábola, su vértice, eje de simetría e intersecciones con los ejes.

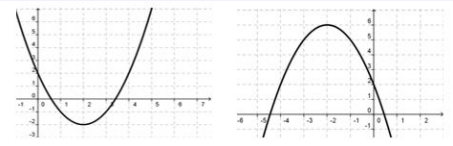
Características del gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$

- **Concavidad:** Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y admite un mínimo. Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y admite un máximo.
- **Vértice:** Es el punto de intersección de la curva con el eje de simetría. Representa un extremo. Sus coordenadas son $V = (x_v\,;\,y_v)$ con $\boxed{y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$
- **Eje de simetría:** recta vertical que pasa por el vértice, su ecuación es $x = x_v$
- **Ceros:** se obtienen resolviendo la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ para lo cual podemos aplicar la fórmula resolvente:

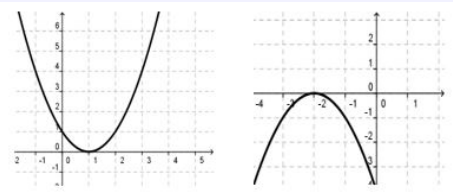
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según cuál sea el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ podrán presentarse las siguientes situaciones:

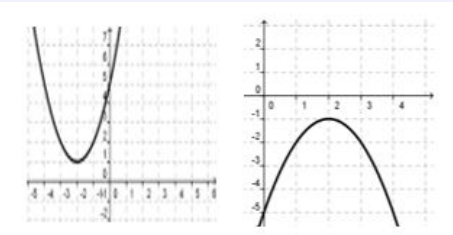
$\Delta > 0$,la parábola corta al eje x en dos puntos, por ejemplo:



$\Delta = 0$,la parábola corta al eje x en un punto, que coincide con el vértice. Por ejemplo:



$\Delta < 0$,la parábola no corta al eje x. Por ejemplo:



- **Intersección con el eje y:** Se produce en el punto de coordenadas $(0, f(0)) = (0, c)$

Ejemplo 1: Graficar $f(x) = x^2 - 4x + 3$

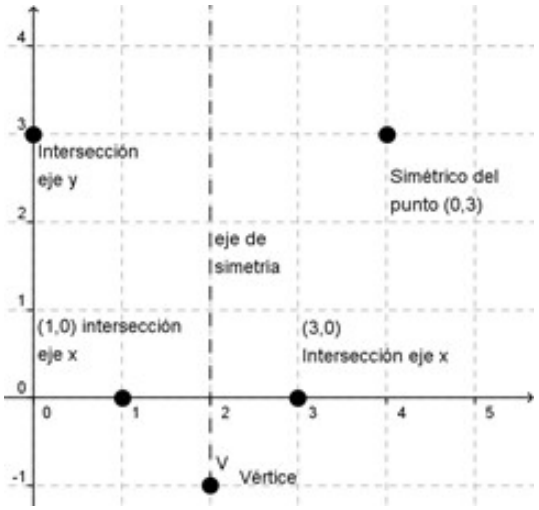
En este ejemplo $a = 1$; $b = -4$; $c = 3$.

- **Concavidad:** $a = 1 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y admite un mínimo.
- **Vértice:**

$$x_v = \frac{-(-4)}{2.1} = 2$$
$$y_v = f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$$

  Por lo tanto: $V = (2, -1)$

- **Eje de simetría:** $x = 2$
- **Ceros:** En nuestro ejemplo, a partir de la ubicación del vértice y de la concavidad podemos observar que la parábola cortará al $eje\ x$ en dos puntos. Para hallarlos resolvemos la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$, la cual arroja como soluciones : $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$
- **Intersección con el eje** y**:** $(0; 3)$ Ubicamos los puntos hallados en el gráfico anterior y buscamos el simétrico del punto $(0, 3)$ respecto del eje de simetría, de forma de ganar otro punto por el que pasará nuestro gráfico



Uniendo los puntos, obtendremos el gráfico buscado

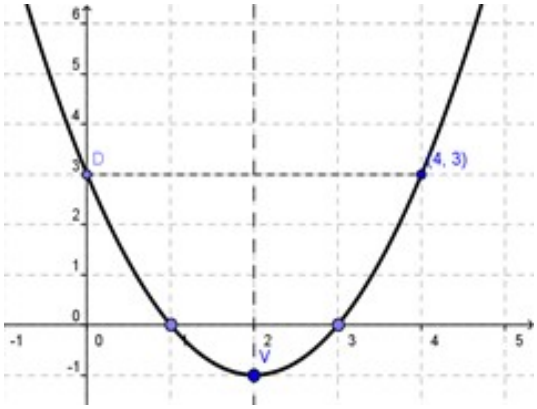


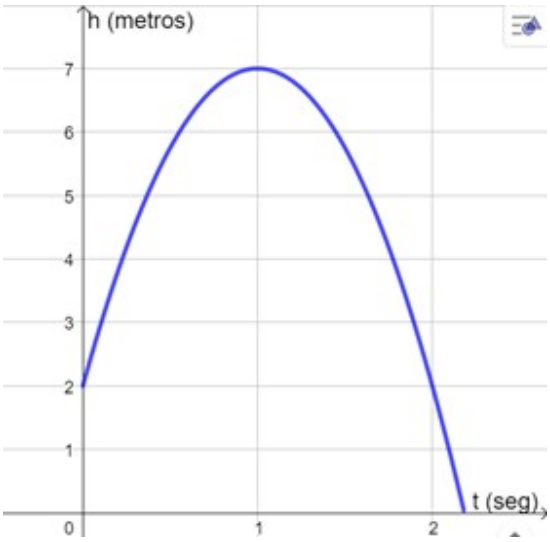
Figure 11: Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Ejemplo 2:

Una persona lanza un balón al aire para que su amigo lo atrape, pero quiere calcular el tiempo preciso en el que el balón llegará a las manos de su amigo. Si la ecuación que describe la altura del balón en función del tiempo es $h = 2 + 10t - 5t^2$.

1. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
2. Si los brazos del amigo se encuentran a 2 metros de altura, ¿Cuántos segundos tomará el balón para llegar a él?.

Resolución:



Este ejercicio es similar al que resolvimos al iniciar esta sección. Al igual que hicimos en ese problema, para responder lo que nos piden podemos ayudarnos con el gráfico de la función dada En función del contexto de nuestro problema sólo debemos graficar la porción de curva gráfico de $h(t)$ ubicada en el primer cuadrante puesto que t representa el tiempo, medido en segundos, y h representa la altura en metros motivo por el cual ambas variables deben ser positivas. Para nuestra ecuación, $h(t) = 2 + 10t - 5t^2$ con $a = -5; b = 10; c = 2$. A partir del signo de a podemos observar que la parábola gráfico de $h(t)$ es cóncava negativa. El valor del parámetro c nos indica que la parábola corta al eje y en el punto $(0, 2)$. El vértice de la parábola posee como abscisa $x_v = -\frac{10}{2.(-5)} = 1$ y como ordenada $y_v = h(1) = 2 + 10.(1) - 5(1)^2 = 7$ por lo cuál el vértice de la parábola será el punto $V = (1, 7)$ y el eje de simetría será la recta de ecuación $t = 1$ La intersección con el eje horizontal se da en los puntos resultado de la

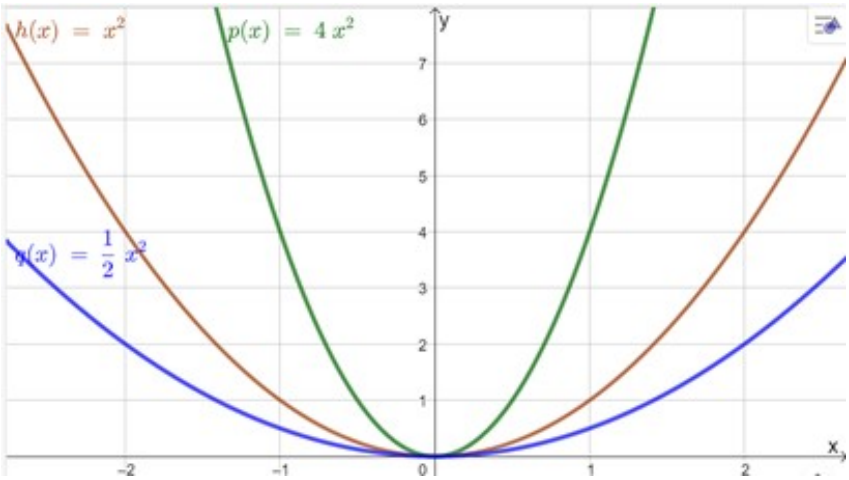
ecuación $2+10t-5t^2=0$ que en este caso corresponde a los valores $t_1=\frac{5-\sqrt{35}}{10}$; $t_2=\frac{5+\sqrt{35}}{10}$ en este caso sólo consideraremos el segundo de los valores que es el que corresponde a un valor positivo de t.

A partir del gráfico podemos ver que la altura máxima es de 7 metros y que la altura de 2 metros la alcanza al inicio y a los dos minutos.

Expresión Canónica de la Función Cuadrática

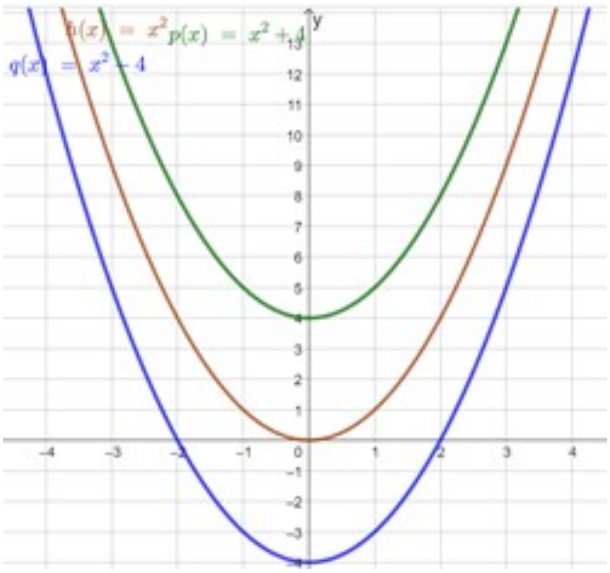
Decimos que una función cuadrática está expresada en forma canónica si la misma responde a la expresión: $f(x)=a(x-x_o)^2+y_0$ Observar los siguientes gráficos y responder

1. ¿Cuáles son los cambios que se producen en el gráfico de la función al variar los valores de a?
2. ¿Cuáles son los cambios que se producen en el gráfico de la función al variar los valores de x_0 e y_0?
3. ¿Cómo influye la variación de x_0 e y_0 en las coordenadas del vértice?
4. ¿Qué información es necesario conocer para poder escribir la ecuación de una parábola en forma canónica?



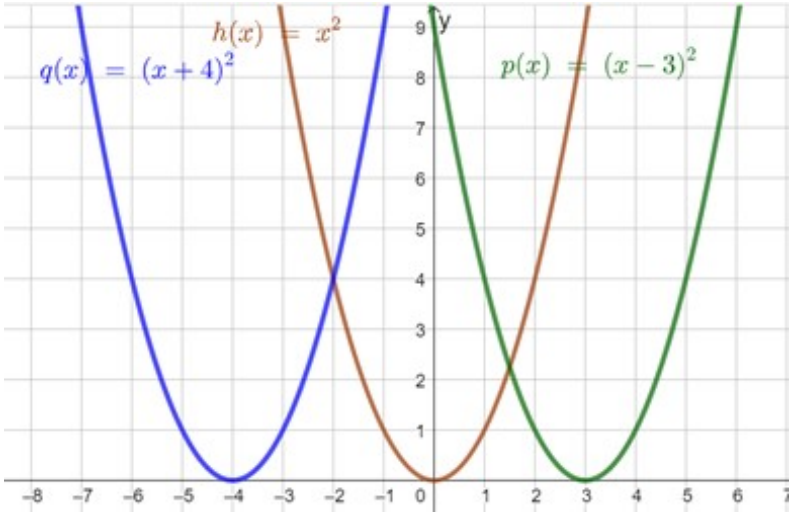
Conclusiones

Además de determinar la concavidad de la parábola $y=ax^2$, el coeficiente a es un factor de escalamiento: la parábola se aproxima al eje x conforme $|a|$ se aproxima a cero y se aproxima al eje y conforme $|a|$ aumenta.



Conclusiones

El valor de y_0 determina que la gráfica de $y = ax^2$ se desplace y_0 unidades hacia arriba si $y_0 > 0$ o y_0 unidades hacia abajo si $y_0 < 0$. Además el valor de y_0 coincide con la ordenada del vértice de la parábola.



Conclusiones

El valor de x_0 determina que la gráfica de $y = ax^2$ se desplace x_0 unidades a la derecha si $x_0 > 0$ o x_0 unidades a la izquierda si $x_0 < 0$. Además, el valor de x_0 coincide con la abscisa del vértice de la parábola.

Forma Canónica

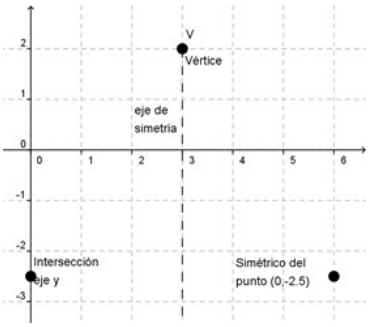
Si nos dan la ecuación canónica de una parábola es inmediato indicar cuáles son las coordenadas del vértice de la misma : dada la parábola $y = a\,(x - x_o)^2 + y_0$ su vértice posee coordenadas $V = (x_o, y_0)$

Ejemplo 1: Graficar $y = -\frac{1}{2}\,(x-3)^2 + 2$. A partir del gráfico determine el conjunto imagen de la función.

Resolución:

Identifiquemos el valor de parámetros y la información que dichos valores nos dan:

$$y = -\frac{1}{2}\,(x-3)^2 + 2 \begin{cases} a = -\frac{1}{2} < 0 \\ x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

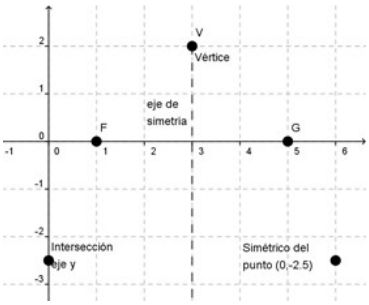


Coordenadas del Vértice: $V = (3; 2)$

Eje de simetría: $x = 3$.

Intersección con el eje y: $(0; f(0)) = (0; -\frac{1}{2}\,(0-3)^2 + 2) = (0; -\frac{5}{2})$

La posición del vértice y la concavidad de la curva nos muestra que la misma posee ceros. Los calculamos:



$$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-3)^2 = -2$$

$$(x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{4}$$

$$|x-3| = 2 \begin{cases} x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Conjunto de ceros: $cerf = \{1, 5\}$

Ahora unimos los puntos y leemos la imagen de la función:

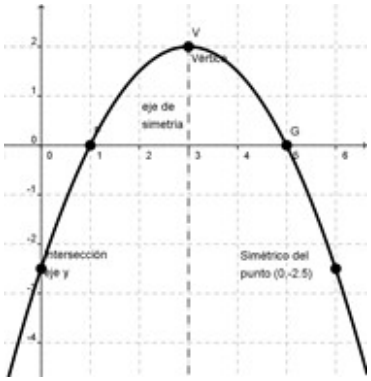
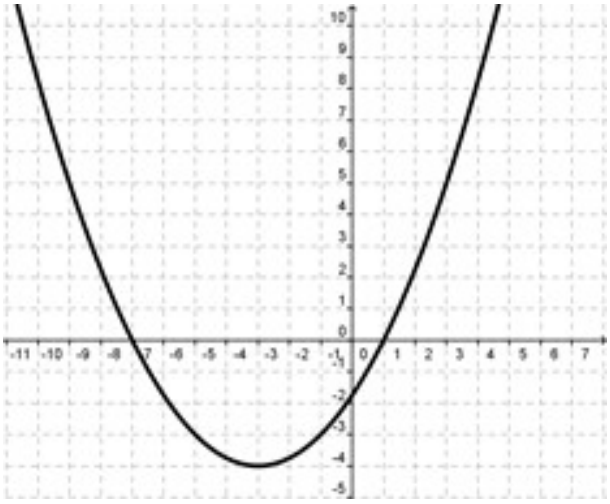


Figure 12: $Imf = (-\infty\,;\,2]$

Ejemplo 2:

1. Hallar la expresión de la función cuadrática cuyo gráfico se adjunta.
2. Determinar el conjunto imagen de la función.



Resolución:

Del gráfico se desprende que el vértice de la parábola es $V = (-3, -4)$. Por lo tanto podemos afirmar que la ecuación canónica de la parábola responde a la forma $y = (ax - (|3))^2 - 4 \Leftrightarrow y = a(x+3)^2 - 4$

Para hallar el valor del parámetro a bastará con hallar un punto por el que pase la parábola por ejemplo $(1; 0)$. Como el punto pertenece a la curva debe verificar su ecuación de donde, si sustituimos x por 1 debemos sustituir y por 0.

$0 = a(1+3)^2 - 4$ Obtuvimos una ecuación de la cual podemos despejar el valor del parámetro a. $0 = a(1+3)^2 - 4 \Leftrightarrow 4 = 16a \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$

La ecuación buscada será $y = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 4$.

Verificación:

Para verificar que la ecuación hallada es la correcta podemos utilizar otro punto del gráfico, por ejemplo el punto $(-7, 0)$. Si la ecuación hallada corresponde al gráfico dada debe verificar que $y(-7) = 0$. Veamos si esto ocurre:

$y(-7) = \frac{1}{4}(-7+3)^2 - 4 = 0$ ✓ Verifica

b) $Imf = [-4, +\infty)$

Observación

Para pasar de la forma polinómica de la función cuadrática , $f(x) = ax^2 + bx + c$, a la expresión canónica, $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, bastará hallar las coordenadas del vértice

$$V = (x_o, y_o) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Recíprocamente, para pasar de la expresión canónica de la función cuadrática a la desarrollada, bastará desarrollar el cuadrado.

Expresión factorizada de la función cuadrática

Características del gráfico de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- **Concavidad:** Como indicamos anteriormente, la concavidad está dada por el signo del parámetro a.
- **Ceros:** Dada la ecuación factorizada es inmediato indicar cuáles son sus ceros, es decir, dada la parábola:

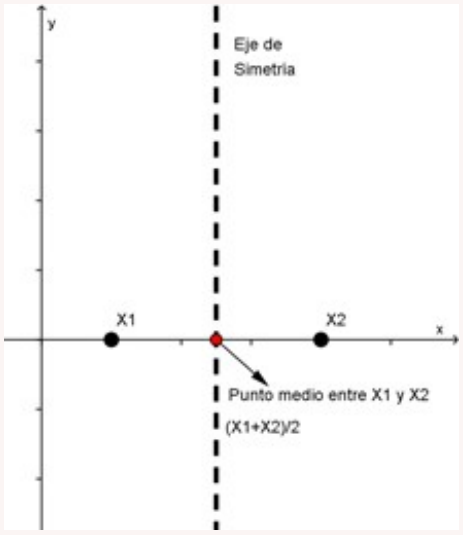
  $$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

  su conjunto de ceros es el conjunto $Cerf = \{x_1, x_2\}$.
- **Eje de simetría:** Si conocemos los ceros de la parábola, el eje de simetría pasará por el valor de x que equidiste de $x_1 \text{y} x_2$.

  De esto se desprende que la ecuación del eje de simetría será:

  $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- **Vértice:** Si conocemos la ecuación del eje de simetría sabemos que el vértice estará sobre dicha recta, por este motivo podemos afirmar que $\boxed{x_v = \frac{x_1+x_2}{2}}$ y como vimos para la forma polinómica, dado x_v podemos calcular el valor de $\boxed{y_v = f\,(x_v)}$
- **Intersección con el eje y:** Al igual que vimos para la expresión desarrollada de la función cuadrática , la intersección con el eje y se produce en el punto de coordenadas $(0, f(0))$.

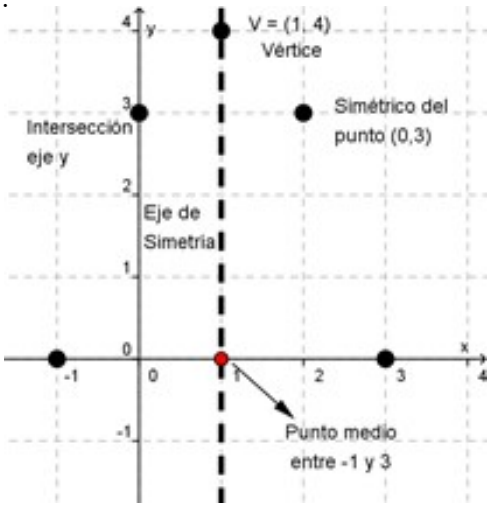


Ejemplo 1:

Grafique $y = -(x+1)(x-3)$ identificando previamente concavidad, ceros, vértice, eje de simetría e intersección con el eje y.

Identifiquemos en primer lugar nuestros parámetros:

$$y = -(x+1)(x-3) \begin{cases} a = -1 < 0 \\ x_0 = -1 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$



Concavidad: $a = -1 < 0$ la parábola a graficar será cóncava negativa.

Ceros: Se desprenden de la ecuación dada: $Cerf = \{-1, 3\}$

Eje de simetría: Recordemos que equidista de las raíces, es decir: $x = \frac{-1+3}{2} = 1$

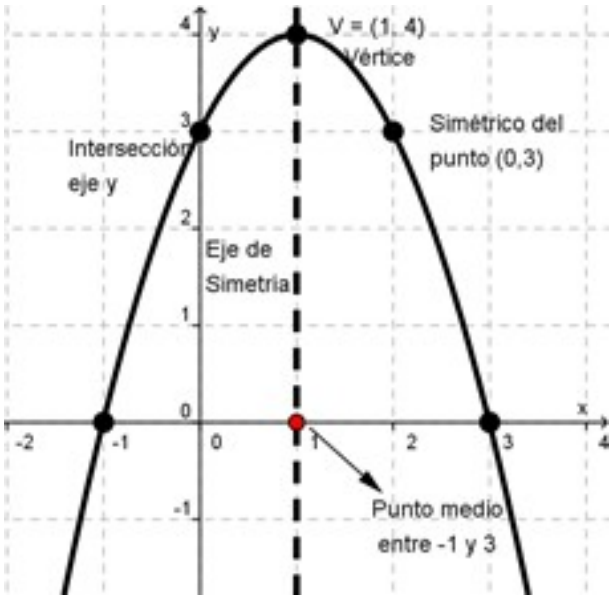
Vértice: Está ubicado sobre la recta de ecuación $x = 1$ y sus coordenadas son:

$$V = (1, f(1)) = (1, -(1+1)(1-3)) = (1, 4)$$

Intersección con el eje y:

$$(0, f(0)) = (0, -(0+1)(0-3)) = (0, 3)$$

Unimos los puntos y obtenemos el gráfico buscado:



Observación

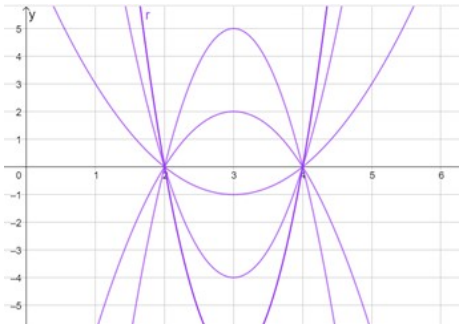
Para pasar de la expresión desarrollada de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, a la expresión factorizada de la misma, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, bastará buscar los ceros de la misma.
No toda función cuadrática puede expresarse como $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, sólo aquellas cuyo conjunto de ceros es no vacío.
En el caso en que la función posea un único cero, $f(x)$ se podrá expresar como $f(x) = a(x - x_1)^2$. En este caso la expresión factorizada coincide con la expresión canónica de la función cuadrática.

Ejemplo 2: Hallar la ecuación de la función cuadrática cuyo conjunto de ceros es el conjunto $Cerf = \{2, 4\}$ y cuyo conjunto imagen es el intervalo: $[-4, +\infty)$. Graficar dicha función.

Resolución:

Como conocemos el conjunto de ceros podemos hallar la expresión factorizada de la función cuadrática buscada. Ésta responderá a la expresión: $f(x) = a(x - 2)(x - 4)$, donde nos queda por determinar el valor de a.

Alguna de las parábolas cuyo conjunto de ceros es el dado podrán responder a las siguientes gráficas:



Veamos qué condición debe cumplirse para que el conjunto imagen sea el intervalo $[-4, +\infty)$. Como se puede ver en los gráficos anteriores, para que suceda esto, la parábola debe ser cóncava positiva y la coordenada y del vértice debe ser -4.

Como vimos anteriormente, podemos obtener la coordenada x_v como

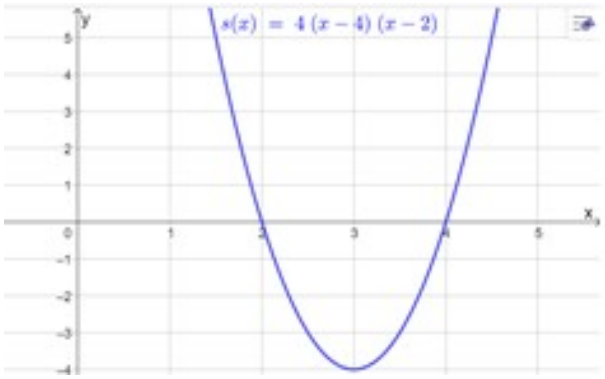
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

de donde se desprende que el vértice de la parábola es $V = (3, -4)$.

Como el vértice es un punto de la curva debe verificar la ecuación de la misma, luego sustituimos en la ecuación

$$f(x) = a(x + 2)(x - 4)$$

y despejamos el valor de a:

$$-4 = a\,(3-2)\,(3-4) \Leftrightarrow -4 = a\,(1)\,(-1) \Leftrightarrow -4 = -a \Leftrightarrow a = 4$$

De lo expuesto se deduce que la función buscada posee ecuación $f\,(x) = 4\,(x-2)\,(x-4)$