Desarrollo de productos de factores y factorizar

Cuando trabajemos con expresiones algebraicas nos puede pasar que necesitemos escribirlas de diferentes maneras.

Por ejemplo:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

La expresión del lado izquierdo del igual es la misma que la del lado derecho, sin embargo lucen de manera muy diferente.

Si nos fijamos bien, la parte del lado izquierdo tiene tres términos. En cambio, la del lado derecho uno solo. Hay que tener en cuenta que

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

Al escribirlo de esta forma se ve más claro que tenemos dos factores multiplicándose. En resumen, pasamos de la suma de tres términos al producto de dos factores. Por eso decimos que esta expresión está *factorizada* (comúnmente se expresa mal diciendo que está factoreada, pero esta palabra no existe).

Muchas veces nos pasará que tengamos la expresión factorizada y deseemos desarrollarla. ¿Por qué? Podríamos necesitar sumar otros términos, por lo que antes deberemos desarrollarla.

Ejemplo:

$$(x-2)^2 + 4x$$

En este caso nos conviene desarrollar el binomio (por dos términos) al cuadrado para achicar la expresión. De este modo:

$$(x-2)^2+4x=x^2-4x+4+4x=x^2+4$$

Lo cual es más simple que la expresión original.

Por el contrario, a veces nos convendrá factorizar una expresión para poder simplificar.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-4x+4}{x-2}$$

Escrito de este modo no podemos simplificar nada, en cambio al factorizar:

$$\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$$

Lo cual es más simple.

Nota importante: estas expresiones son equivalentes siempre y cuando x sea distinto de 2. Ya que la expresión del lado izquierdo no está definida para ese valor de x.

Desarrollo de factores

El desarrollo de factores es tan sencillo como hacer una distributiva con cuidado. En este ejemplo:

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = xx - 2x - 2x - 2(-2)$$

Y, agrupando:

$$xx - 2x - 2x - 2(-2) = x^2 - 4x + 4$$

Por supuesto que hay reglas que dicen, el primero al cuadrado, más el doble producto del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado. Pero no hacen falta recordarlas.

Factorizar

Para factorizar hay varios casos, nosotros necesitaremos, por ahora, sólo dos:

- factor común
- diferencia de cuadrados

Factor común

Debemos detectar en los diferentes términos si hay expresiones que se repitan. Hay que tener cuidado porque éstas pueden estar ocultas.

Por ejemplo:

$$2x + 6$$

En esta expresión tenemos dos términos y, aparentemente, no hay nada que se repita. Sin embargo, podemos escribirla de la siguiente forma:

$$2x + 6 = 2x + 2.3$$

Ahora sí, detectamos que el 2 se repite en ambos términos, por lo tanto lo podemos escribir aparte una sola vez

$$2x + 6 = 2x + 2.3 = 2(x + 3)$$

Hay que tener cuidado cuando sucede algo así:

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

Nótese que en el segundo término se escribe un uno al sacar el dos y no un cero. Si hiciéramos eso se perdería el segundo término de nuestra expresión.

Diferencia de cuadrados

Diferencia significa resta. Por lo tanto es resta de dos términos al cuadrado.

Por ejemplo:

$$x^2 - 9$$

El nueve lo podemos escribir como tres al cuadrado, por lo tanto:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

Nos quedamos con los términos que no están al cuadrado y armamos dos factores: uno sumándose y, otro, restándose.

Casos combinados

Hay casos en que se puede factorizar de manera múltiple. Por ejemplo:

$$3x^5 - 48x$$

Detectamos que una x se repite en ambos términos y un tres también, por lo tanto hacemos factor común:

$$3x^5 - 48x = 3x(x^4 - 16)$$

Pero dentro del paréntesis nos quedó una diferencia de cuadrado. Entonces:

$$3x^5 - 48x = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

Si nos fijamos bien, en el último paréntesis también tenemos otra diferencia de cuadrados. Por lo tanto:

$$3x^5 - 48x = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$