Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es toda expresión del tipo **ax + by = c** siendo a, b y c números reales, a y b diferentes de 0 y x e y son las incógnitas.

Por ejemplo

$$3x - y - 2 = 2y + 4$$

es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Para resolver una ecuación de este tipo, se necesita encontrar un par de valores que asignados a las incógnitas satisfacen la ecuación.

Sea por ejemplo la ecuación: $x - y = 5$.

Una solución de la misma es $x = 8$ e $y = 3$ ya que $8 - 3 = 5$.

Pero no es la única. También lo son:

- $x = 100$; $y = 95$ pues $100 - 95 = 5$
- $x = 5$; $y = 0$ pues $5 - 0 = 5$
- $x = 3$; $y = -2$ pues $3 - (-2) = 5$
- $x = 0$; $y = -5$

A cada una de las soluciones encontradas se la puede escribir como un par ordenado de números reales: (100; 95); (-5; -10); (3; -2); (0; -5) donde el primer valor es el que se le asigna a "x" y el segundo es el valor de "y" obtenido al reemplazar "x" en la ecuación dada.

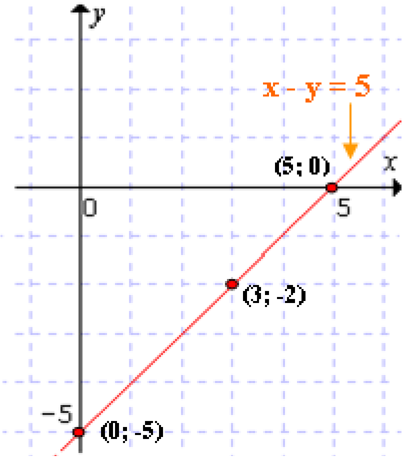
Si la ecuación dada se escribe en forma equivalente $y = x - 5$; cada par ordenado que es solución de la misma tiene la forma $(x; y = x - 5)$, con x e y números reales.

Gráficamente, las soluciones de la ecuación $x - y = 5$ pertenecen a una recta.

Al conjunto de soluciones se lo puede expresar mediante:

$$S = \{(x; y) \in \Re^2 / y = x - 5\}$$

(Con $\Re^2$ indicamos el plano real)



Para recordar

- Toda ecuación lineal con dos incógnitas admite un **número infinito de soluciones.**
- Los pares ordenados que representan todas las soluciones de una ecuación lineal o de primer grado con dos incógnitas pertenecen a la recta de ecuación ax + by = c.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas -también llamado sistema lineal 2x2- es un par de ecuaciones consideradas simultáneamente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22}; b_1 y b_2 son números conocidos. Mientras que x e y son desconocidos.

A los números:

- a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22}; se los llama coeficientes del sistema
- b_1 y b_2 se los llama términos independientes
- x e y son las incógnitas del sistema.

Cada una de las ecuaciones que forma el sistema es una ecuación de primer grado con dos incógnitas, y su gráfica es una recta.

En muchas situaciones interesa conocer la intersección de esas rectas.
Por ejemplo, si tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Podemos hallar gráficamente la intersección de ambas rectas.

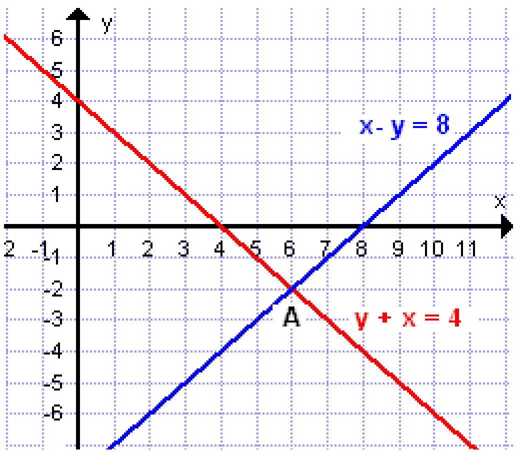
Observamos que ambas se cortan en el punto

A = (6; -2)

Y que este punto pertenece a la recta x + y = 4 y también a la recta x – y = 8.

Para corroborar que A = (6; -2) es el punto de intersección de las rectas, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$$



- Despejamos x de la primera ecuación: x = 4 – y
- Despejamos x de la segunda ecuación: x = 8 + y

- Igualamos los segundos miembros: $4 - y = 8 + y$
- Y despejamos y : $4 - 8 = 2y$

  $-4 = 2y$

  $-2 = y$
- Reemplazamos el valor de y en alguna de las ecuaciones, por ejemplo en $x = 4 - y$

  Y es: $x = 4 - (-2) = 6$
- El punto A = (6; -2) es la intersección de ambas rectas.

En este caso decimos que A es *solución* del sistema.

En general para resolver un sistema de ecuaciones hay que realizar entre ellas ciertas transformaciones que las simplifiquen y que mantengan sus soluciones.

Decimos que:

> Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

son dos sistemas equivalentes ya que A = (6; -2) es solución de ambos

Al reemplazar por $x = 6$ e $y = -2$

- En el primer sistema es: $6 + (-2) = 4$ y $6 - (-2) = 8$
- En el segundo sistema es: $2(6) + 2(-2) = 8$ y $6 - (-2) = 8$

Cuando encontramos todas las soluciones de un sistema de ecuaciones, decimos que hemos resuelto el sistema.

> Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar todas sus soluciones o demostrar que no tiene solución.

Hay distintas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, además del gráfico o el de igualación que usamos en el ejemplo.

Recordamos el método de sustitución y el de reducción o eliminación de Gauss.

Método de sustitución.

Consiste en:

1. Elegir una de las dos incógnitas.
2. Aislar la incógnita seleccionada en una de las ecuaciones.
3. Reemplazar el valor de la incógnita seleccionada en la ecuación restante, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita.
4. *Resolver la ecuación resultante con el fin de hallar el valor de la incógnita.*
5. *Reemplazar el valor encontrado en la expresión hallada en el paso 2 para obtener la otra incógnita.*
6. *Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.*

Ejemplo 1

Resolver $\begin{cases} x + 2y = -12 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

Solución

$x = -12 - 2y$	Elegida "x" se la despeja en la primera ecuación
$3(-12 - 2y) - y = -1$	Se reemplaza el valor de la incógnita en la segunda ecuación.
$-36 - 6y - y = -1$ $-36 - 7y = -1$ $-7y = -1 + 36$ $-7y = 35$ $y = 35 : -7$ $\underline{y = -5}$	Se resuelve la ecuación resultante con el fin de hallar "y"
$x = -12 - 2(-5)$	Se reemplaza el valor de y hallado en $x = -12 - 2y$
$x = -12 + 10$ $\underline{x = -2}$	Operando
$(-2) + 2(-5) = -2 - 10 = -12$ $3(-2) - (-5) = -6 + 5 = -1$	Verificamos que los valores hallados satisfacen ambas ecuaciones.
Luego es **S = {(-2; -5)}**	Damos la solución del sistema.

Método de eliminación o de método de Gauss

Dado un sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

se trata de transformarlo en otro equivalente de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \qquad\quad a_{n2}y = b_n \end{cases}$$

aplicando sucesivamente alguna de las siguientes operaciones:

- Intercambiar las ecuaciones
- Cambiar el orden de las incógnitas en las dos ecuaciones.
- Multiplicar ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar y restar miembro a miembro dos ecuaciones y reemplazar una de ellas por la suma o diferencia.

Ejemplo 2

Resolver $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$	Al observar el sistema se ve que el coeficiente de x en las dos ecuaciones es el mismo.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -y - 3y = 5 - 1 \end{cases}$$

Se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar la "x" en la segunda.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -4y = 4 \end{cases}$$

Operando resultan los sistemas equivalentes.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = 4 : (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$2x - (-1) = 5$

El valor de y se reemplaza en la primera ecuación para hallar x.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 5 \\ 2x &= 5 - 1 \\ 2x &= 4 \\ \underline{x} &\underline{= 2} \end{aligned}$$

Se obtiene el valor de x.

$$\begin{aligned} 2.2 - (-1) &= 4 + 1 = 5 \\ 2.2 + 3(-1) &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Verificamos si los valores hallados satisfacen ambas ecuaciones.

Luego la solución es $\underline{S = \{(2; -1)\}}$

Ejemplo 3

Resolver $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Solución

En el sistema dado las incógnitas tienen distintos coeficientes en las dos ecuaciones. Cuando esto sucede conviene observar para cuál de las dos incógnitas es más fácil igualar los valores absolutos de sus coeficientes. En este caso elegimos la y.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 9x + 3y = 3 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 resulta el sistema equivalente.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 9x = 5 + 3 \end{cases}$$

En el sistema resultante los términos en y tienen sus coeficientes iguales en valor absoluto pero de distinto signo.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 11x = 8 \end{cases}$$

Para eliminar y en la segunda ecuación sumamos las dos ecuaciones y reemplazamos la segunda, obteniendo sistemas equivalentes al dado.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x = \dfrac{8}{11} \end{cases}$$

En la segunda ecuación dividimos miembro a miembro por 11 y así se halló el valor de x.

$$2.\frac{8}{11}-3y=5$$

$$\frac{16}{11}-5=3y$$

$$\frac{-13}{11}=y$$

Reemplazando x en la primera ecuación.

Operando convenientemente hallamos el valor de y.

Reemplazamos en el sistema original los valores de x e y que hallamos:

$$2\cdot\frac{8}{11}-3\frac{-13}{11}=\frac{16}{11}+\frac{39}{11}=\frac{55}{11}=5$$

$$3\cdot\frac{8}{11}+\frac{-13}{11}=\frac{24}{11}-\frac{13}{11}=\frac{11}{11}=1$$

Se verifica que los valores de x e y hallados verifican las dos ecuaciones del sistema.

Como los valores hallados verifican el sistema concluimos que

$$S=\left\{\left(\frac{8}{11};-\frac{13}{11}\right)\right\}$$

En los ejemplos que planteamos de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, siempre encontramos una solución.

Pero puede suceder también que el sistema

- tenga infinitas soluciones.
- no tenga solución

Un sistema que:

- tiene una única solución se dice *compatible determinado*
- tiene infinitas soluciones se dice *compatible indeterminado*
- ninguna solución se dice *incompatible*

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Cada una de las ecuaciones que forman un sistema de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

es una ecuación lineal con dos incógnitas. Si se las considera en forma independiente, el conjunto de soluciones está representado por una recta en el plano.

Para determinar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede representarse la gráfica de las dos ecuaciones y determinar si existen el punto o los puntos comunes a ambas gráficas.

Ejemplo 4

Resolver gráficamente $\begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

Solución

Para graficar las rectas escribimos el sistema en la forma

$$\begin{cases} y = (-2 - 3x) : -4 \\ y = (6 - x) : 2 \end{cases}$$

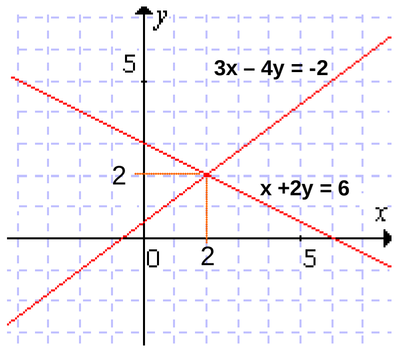
Operando

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Para representar cada ecuación basta con elegir dos puntos ya que cada una de ellas es la ecuación de una recta.

Por ejemplo;

- En la primera ecuación: (0; ½) y (-2/3; 0).
- En la segunda ecuación: (0; 3) y (6; 0)



Las dos rectas se cortan en el punto (2; 2).

Verificamos si ésta es la solución del sistema reemplazando en la primera ecuación:

3.2 - 4.2 = 6 – 8 = -2

vemos que la satisface.

Reemplazando en la segunda

2 + 2.2 = 2 + 4 = 6

también la satisface.

Concluimos que <u>S = {(2; 2)}</u> (verifiquenlo analíticamente)

Ejemplo 5

Resolver gráficamente $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 1 = -2y \end{cases}$

Solución

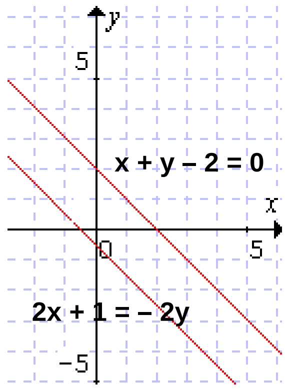
Escribimos el sistema en la forma:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Y representamos las rectas eligiendo, por ejemplo:

- Para la primera ecuación los puntos (0; 2) y (1; 1)
- Para segunda ecuación los puntos (0; -1/2) y (-1/2; 0)

Observamos que las rectas no tienen mingún punto en común.
Concluimos que el sistema es *incompatible*, es decir no tiene solución



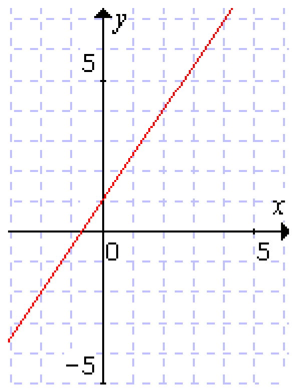
Ejemplo 6

Resolver gráficamente $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 9x - 6y + 6 = 0 \end{cases}$

Solución

Al aislar *y* en las dos ecuaciones y resolver las operaciones iindicadas resulta

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x - 2}{-2} \\ y = \dfrac{-9x - 6}{-6} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 1 \\ y = \dfrac{3}{2}x + 1 \end{cases}$$



Las dos ecuaciones resultantes son iguales, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones que están todas sobre la recta de ecuación

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

Por ejemplo los pares ordenados (0; 1) y (2; 4) verifican el sistema.

En general lo verifica cualquier par ordenado de la forma:

$$\left(x; \frac{3}{2}x + 1\right)$$

Se trata de un *sistema indeterminado* (verifiquenlo)

En general:

Dado un sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Si el sistema es *incompatible*, se cumple que: $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ Las rectas que representan el sistema son paralelas entre sí.	Si el sistema es *indeterminado*, se cumple que: $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$ Las rectas que representan el sistema son coincidentes. Tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver problemas en cuya solución interviene más de una variable, el proceso es esencialmente el mismo que para aquellos en los que interviene sólo una, aunque aquí la respuesta al problema se alcanza resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 7

Esteban pagó una cuenta de \$300 con billetes de \$2 y de \$5. En total empleó 90 billetes para hacer el pago. ¿Cuántos billetes de cada valor utilizó?

Solución

Las variables son la cantidad de billetes de \$2 y de \$5 que utilizó.

Designemos con x e y la cantidad de billetes de \$2 y de \$5 que utilizó.

Además x e y deben ser números naturales.

Buscamos la forma de expresar las condiciones que deben cumplir las variables:

- En total empleó 90 billetes se lo puede escribir como $x + y = 90$
- Pagó la cuenta de \$300 con billetes de \$2 y de \$5, como $300 = 2x + 5y$

Resolvemos el sistema, por ejemplo por el método de sustitución:

Aislando "y" en la primera ecuación es	$y = 90 – x$.
Reemplazando en la segunda ecuación:	$2x + 5(90 –x) = 300$
Operando	$2x + 450 – 5x = 300$
Asociando los términos en x:	$-3x + 450 = 300$
Restando miembro a miembro 450:	$- 3x = -150$
Dividiendo miembro a miembro por –3:	$\underline{x = 50}$.
Reemplazamos en $y = 90 – x$:	$y = 90 – 50$
	$\underline{y = 40}$.

Finalmente analizamos los resultados obtenidos y damos la respuesta.

a. Se comprueba que $x = 50$ e $y = 40$ satisfacen las ecuaciones del sistema pues:
   - Sumados dan 90: $50 + 40 = 90$
   - Y cumplen que $2x + 5y = 300$

     $2.50 + 5.\ 40 = 100 + 200 = 300$

b. Además x e y son números naturales.

Concluimos que la solución del sistema es $S = \{(50; 40)\}$.

Luego, Esteban utilizó 50 billetes de \$2 y 40 billetes de \$5.

(no olviden verificar el resultado)

Ejemplo 8

Gustavo es dueño de un negocio y quiere saber cuánto dinero entró en la caja durante el fin de semana. Sabe que cuando el sábado abrió la caja la misma estaba vacía y que el domingo al cerrarla había $400. Además recuerda que el domingo se hicieron 52$ más que el sábado.

Solución

Las incógnitas del problema son la cantidad de dinero que entró el sábado y la cantidad de dinero que entró el domingo. Llamemos s y d a las incógnitas que representan esas cantidades.

Lo que entró en la caja el sábado y lo que entró el domingo lo simbolizamos mediante:

$$s + d = 400$$

Y que el domingo se hicieron $52 más que el sábado, mediante $d = s + 52$

Con estas dos ecuaciones planteamos el sistema:

$$\begin{cases} s + d = 400 \\ d = s + 52 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema sustituyendo d en la primera ecuación: $s + (s + 52) = 400$.

De donde es $\underline{s = 174.}$

Reemplazando en la segunda ecuación: $d = 174 + 52$

$$\underline{d = 226.}$$

Se verifica que la solución del sistema es $S = \{(174; 226)\}$.

Luego <u>el sábado entraron en la caja $174 y el domingo $226</u>

(no olviden verificar el resultado)