# ECUACIONES CUADRÁTICAS

***Ecuaciones[1] de segundo grado***

Se conoce como *ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado* con una incógnita a toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, y a, b y c números reales).

Los números a, b y c son los coeficientes de la ecuación.

Por ejemplo, es una ecuación de segundo grado:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, \text{ donde } a = 3;\ b = 2 \text{ y } c = -5.$$

Aunque expresadas de otra manera, son también ecuaciones de segundo grado:

$$8x^2 = 32$$
$$-x^2 + x = 0$$
$$4x^2 - 16 = 0$$
$$(8x - 2)(2x + 3) = 0$$
$$(2x - 3)^2 = 16$$

En algunos casos es relativamente fácil resolver una ecuación de segundo grado.

Revisaremos, mediante ejemplos, cómo hacerlo.

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.

**Ejemplo 1**.

Resolver $(x - 2)(x + 3) = 0$

*Solución*

La expresión en el primer miembro es un producto entre números reales.

Para que este producto sea igual a cero es suficiente que lo sea uno de factores.

En este caso $x - 2 = 0$ ó $x + 3 = 0$.

Luego, las soluciones son

$$x = 2 \text{ ó } x = -3$$

ya que cualquiera de estos números anula a uno de los paréntesis.

Así $S = \{2; -3\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado se llaman raíces de la ecuación cuadrática

**Ejemplo 2**

Resolver $-x^2 + x = 0$

*Solución*

Sacando factor común "x" se tiene:

$$-x^2 + x = x(-x + 1) = 0$$

[1] Elizondo, Giuggiolini, Módulo 2, Articulación Media Universidad; UBA XXI, 2007

Con lo que la ecuación se puede resolver en forma similar a la anterior.

Por lo tanto, las soluciones son: $x = 0$ ó $x = 1$.

Y es $S = \{0; 1\}$

**Ejemplo 3**.

$$4x^2 - 16 = 0$$

*Solución.*

- La expresión en el primer miembro es una diferencia de cuadrados.
  Podemos escribir:

  $$4x^2 - 16 = (2x + 4)(2x - 4) = 0$$

  Y nuevamente las raíces se encuentran al tener en cuenta que para que un producto entre dos factores sea cero es suficiente que lo sea uno de ellos. Así las soluciones son:

  $$\underline{x = -2 \text{ ó } x = 2}$$

- También se puede resolver esta ecuación de la siguiente manera:

  $$4x^2 - 16 = 0$$

  Dividiendo por 4 ambos miembros: $x^2 - 4 = 0$

  Sumando miembro a miembro 4, es: $x^2 = \mathbf{4}$

  De donde :

  $$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

  $$|x| = 2$$

  y esto es cierto si $x = 2$ ó $x = -2$.

  Con lo que se llega a la misma solución.
  Luego es

  $$S = \{-2; 2\}$$

> ***¡Cuidado!***[2]
>
> Si a es un número real cualquiera $\sqrt{a^2} = |a|$

**Ejemplo 4**

$$x^2 + 4 = 0$$

*Solución*

Si se escribe la expresión anterior en la forma $x^2 = -4$ se puede afirmar que esta ecuación no tiene soluciones reales pues no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo.

**Ejemplo 5**

$$(2x - 3)^2 = 16$$

*Solución*

Tomando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad es:

$$\sqrt{(2x-3)^2} = \sqrt{16}$$

Esto es posible hacerlo ya que estamos seguros que $(2x - 3)^2 \geq 0$ porque el cuadrado de un número real es siempre mayor o igual que cero.

La igualdad anterior puede escribirse como:

$$|2x - 3| = 4 \quad (\text{ya que } \sqrt{a^2} = |a|)$$

[2] Ver Valor Absoluto, unidad 1

Luego es:

$$2x - 3 = 4 \text{ ó } 2x - 3 = -4$$

ya que si |a| = 4 ***a*** puede ser 4 ó ***a*** puede ser –4.

Entonces si

$$2x - 3 = 4 \quad \text{es} \quad x = \frac{7}{2}$$

$$2x - 3 = -4 \quad \text{es} \quad x = \frac{-1}{2}$$

Vemos si son soluciones de la ecuación dada $(2x-3)^2 = 16$

$$\text{Si} \quad x = \frac{7}{2}; \quad \left(2.\frac{7}{2} - 3\right)^2 = (7-3)^2 = 4^2 = 16$$

$$\text{Si} \quad x = \frac{-1}{2}; \quad \left(2.\frac{-1}{2} - 3\right)^2 = (-1-3)^2 = (-4)^2 = 16$$

Como verifican la ecuación dada, el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \left\{\frac{7}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$$

En los ejemplos anteriores fue posible hallar las soluciones de las ecuaciones planteadas recurriendo a propiedades conocidas de la igualdad y de los números reales.

Otros casos pueden ser más difíciles de resolver ya que no aparece claro cómo despejar la incógnita pues ésta aparece con distinto grado en los términos de la ecuación.

Por ejemplo en:

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

**Ejemplo 6**

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

***Solución***

¿Es posible escribir la expresión en alguna de las formas anteriores?

En realidad sí ya que el primer término de la igualdad es el desarrollo de $(x + 3)^2$

Veamos:

| | |
|---|---|
| $(x + 3)^2 = (x + 3).(x + 3)$ | Escribiendo el cuadrado como producto. |
| $= x.(x + 3) + 3(x + 3)$ | Distribuyendo. |
| $= x^2 + 3x + 3x + 9$ | Distribuyendo nuevamente. |
| $= x^2 + 6x + 9$ | Asociando y sumando los términos semejantes. |

De este modo podemos reemplazar a $x^2 + 6x + 9$ por la expresión $(x + 3)^2$ en la ecuación dada y escribir:

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$
$$(x + 3)^2 = 4$$

Y se resuelve en forma análoga al ejemplo 5.

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{4}$$
$$|x+3| = 2$$
$$x + 3 = 2 \quad \text{ó} \quad x + 3 = -2$$
$$\text{de donde } x = -1 \text{ ó } x = -5$$

Si se reemplazan estos valores en la ecuación dada, se ve que son solución de la misma.

- Para $x = -1$ es $(-1)^2 + (-1).6 + 9 = 1 - 6 + 9 = 4$
- Para $x = -5$ es $(-5)^2 + (-5).6 + 9 = 25 - 30 + 9 = 4$

Entonces $S = \{-5; -1\}$

El procedimiento usado se basa en el cuadrado de un binomio:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$
$$(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

Otras ecuaciones de segundo grado no pueden reducirse a ninguno de los casos anteriores.

Para resolverlas utilizamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde **a** es el coeficiente de $x^2$; **b** es el coeficiente del término lineal x y **c** es el término independiente y $\mathbf{x_{1,2}}$ son las posibles soluciones de la ecuación dada.

Veamos un ejemplo:

***Ejemplo 7.***

Resolver la ecuación $2x^2 - 12x + 10 = 0$

***Solución***:

Teniendo en cuenta que $a = 2$; $b = -12$ y $c = 10$ reemplazamos en la fórmula anterior:

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.2.10}}{2.2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{4}$$
$$= \frac{12 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{12 \pm 8}{4}$$

Entonces es:

$$x_1 = \frac{12 + 8}{4} = 5 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{12 - 8}{4} = 1$$

Así el conjunto de soluciones de la ecuación dada es

$$S = \{ 1; 5\}$$

lo que puede verificarse reemplazando ambas soluciones en la ecuación dada.

***Número de soluciones de una ecuación de segundo grado***

En los ejemplos propuestos, se observa que una ecuación de segudo grado, puede tener una, dos o ninguna solución en el conjunto de los números reales

Al trabajar con la fórmula resolvente, este hecho puede conocerse analizando el radicando $\mathbf{b^2 - 4ac}$, llamado *discriminante*.

Luego, teniendo en cuenta que $\sqrt{p}$ está definida en los reales sólo cuando $p \geq \mathbf{0}$, analicemos el discriminante $b^2 - 4ac$.

| | |
|---|---|
| • **Si** $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$ | la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas. |
| • **Si** $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$ | la ecuación tiene una sola solución real. |
| | Diremos que es una raíz doble o de multiplicidad 2. |
| • **Si** $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$ | la ecuación no tiene soluciones reales. |

**Ejemplo 8**

Analizamos el discriminante en cada uno de los siguientes casos

- $2x^2 - 8x + 6 = 0$
- $x^2 + 6x + 9 = 0$
- $3x^2 + 2x + 1 = 0$

Si:

- $2x^2 - 8x + 6 = 0$

  $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4.2.6 = 16$

  Como el discriminante es mayor que 0 se puede afirmar que la ecuación tiene dos soluciones reales.

- $x^2 + 6x + 9 = 0$

  $b^2 - 4ac = 6^2 - 4.1.9 = 0$

  Como el discriminante es igual a 0 se puede afirmar que la ecuación tiene una raíz doble o de multiplicidad 2.

- $3x^2 + 2x + 1 = 0$

  $b^2 - 4ac = 2^2 - 4.3. 1 = -8$

  Como el discriminante es menor que 0 se puede afirmar que la ecuación no tiene soluciones reales.

### *Ceros de la función cuadrática*

Al buscar los ceros de una función cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$, planteamos que f(x) = 0 si se verifica que

$$ax^2 + bx + c = 0$$

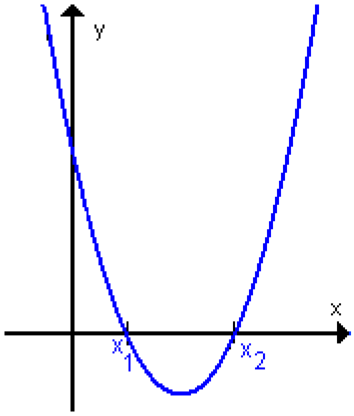
En la solución del problema usamos la forma resolvente que incluye el discriminante $b^2 - 4ac$.

Analizando el signo del discriminante, encontramos tres casos

- $b^2 - 4ac > 0$

  En este caso la parábola corta al eje x en dos puntos; $x_1$ y $x_2$.

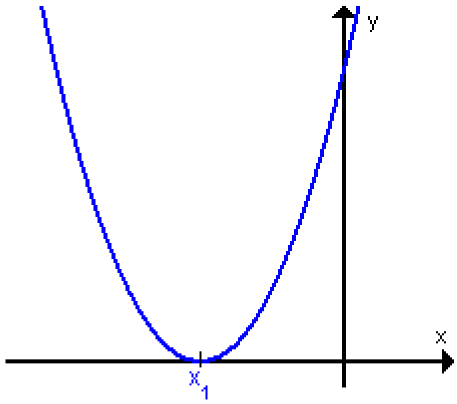
  La función cuadrática tiene dos ceros reales y distintos: $x_1$ y $x_2$.




- $b^2 - 4ac = 0$

  En este caso la parábola corta al eje de abscisas en un solo punto: $x_1 = x_2$.

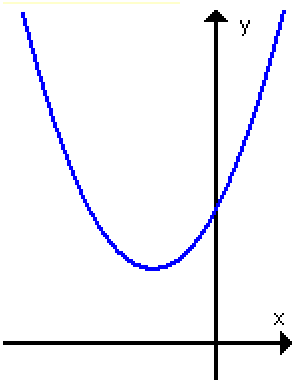
  La función cuadrática tiene un solo cero $x_1 = x_2$




- $b^2 - 4ac < 0$

  En este caso la parábola no corta al eje de abscisas en ningún punto.

  La función cuadrática no tiene ceros.



**Ejemplo 9**

Determinar, sin calcularlos, la cantidad de ceros que tienen cada una de las siguiente funciones;

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$

c) $f(x) = -x^2 - 2x - 2$

*Solución*.

En todos los casos, analizamos el discriminante $b^2 - 4ac$

a) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.\ 1.\ 4 = 16 - 16 = 0$

Como el discriminante es cero, la función tiene un solo cero

b) $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4.\ 2.\ 19 = 144 - 152 = -8$

Como el discriminante es menor que cero, la función no tiene ceros.

c) $b^2 - 4ac = = (-2)^2 - 4.\ (-1).\ (-2) = 4 - 8 = -3$

Como el discriminante es menor que cero, la función no tiene ceros.

***Expresión como producto de una ecuación de segundo grado conocidas sus raíces.***

**Si $x_1$ y $x_2$ son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entonces es:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**Ejemplo 10**

Expresar como producto $2x^2 + 5x - 18$

***Solución***

Para poder escribir como producto la expresión se deben hallar las raíces de

$$2x^2 + 5x - 18 = 0.$$

Aplicando la fórmula resolvente $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para a = 2; b = 5 y c = -18:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-18)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{4}$$

Entonces es

$$x_1 = \frac{-5 + 13}{4} \qquad x_2 = \frac{-5 - 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{8}{4} = 2 \qquad x_2 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

Por lo que $2x^2 + 5x - 18 = 2(x - 2)\left(x + \dfrac{9}{2}\right)$

### *Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado*

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$; y sus raíces si $x_1$ y $x_2$ se verifica que:

1. La suma de las raíces es igual al coeficiente de x cambiado de signo divido el coeficiente de $x^2$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. El producto de las raíces es igual al término independiente dividido el coeficiente de $x^2$.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

**Ejemplo 11.**

En el ejemplo anterior encontramos que $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{-9}{2}$ son las raíces de la ecuación $2x^2 + 5x - 18 = 0$.

Veamos que se verifican las propiedades de la suma y el producto:

- $x_1 + x_2 = 2 + \left(\frac{-9}{2}\right) = 2 - \frac{9}{2} = \frac{-5}{2}$

  El numerador de la fracción es igual al coeficiente 5 de x cambiado de signo y el denominador es igual al coeficiente de 2 de $x^2$.

- $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-9}{2}\right) = \frac{-18}{2}$

  El numerador de la fracción es igual al término independiente -18 y el denominador es igual al coeficiente de 2 de $x^2$.

Las propiedades de de la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado permiten reconstruir la ecuación cuando éstas se conocen.

Así, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.;\ a \neq 0$$

se puede escribir como

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

**Ejemplo 12**

Encontrar la ecuación de segundo grado que tiene por raíces $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$

Por la propiedad de la suma de raíces es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Entonces:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto

$$\frac{-b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-3}{4}$$

Además:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto;

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{8}$$

Reemplazando en $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Es $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$

O bien, multiplicando miembro a miembro por 8:

$$8x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Se puede verificar fácilmente que sus raíces son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$

***Ecuaciones bicuadradas***

Algunas ecuaciones de cuarto grado tienen un aspecto similar a las de segundo grado. Son las llamadas ***ecuaciones bicuadradas***. Su expresión general es:

$$\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ con } a \neq 0.}$$

Para resolverlas, comenzamos por escribirlas en la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$$

Y haciendo la sustitución $x^2 = z$, la expresión anterior queda:

$$az^2 + bz + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado con incógnita z.

**Ejemplo 13**.

Resolver la ecuación $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

*Solución*

Reemplazando $x^2$ por z, nos queda

$$4z^2 - 5z + 1 = 0.$$

Resolvemos para la variable z, usando la fórmula resolvente (siendo a = 4; b = -5 y c = 1)

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.4.1}}{2.4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

De este modo es:

$$z_1 = \frac{5+3}{8} \qquad z_2 = \frac{5-3}{8}$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = \frac{1}{4}$$

Los dos valores hallados son solución de la ecuación $4z^2 - 5z + 1 = 0$.

Ahora debemos obtener los valores de x (ya que hicimos la sustitución $x^2 = z$)

Para $z_1 = 1$ es $x^2 = 1$ es :

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$|x| = 1$$

$$x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

Para

$$z_2 = \frac{1}{4} \quad \text{es} \quad x^2 = \frac{1}{4} \text{, luego } \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\text{y} \quad |x| = \frac{1}{2} \quad \text{por lo que; } \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Entonces el conjunto solución de $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ es

$$S = \left\{-1; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$$

## Intersección de una parábola y una recta

Dadas la parábola de ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

y la recta de ecuación

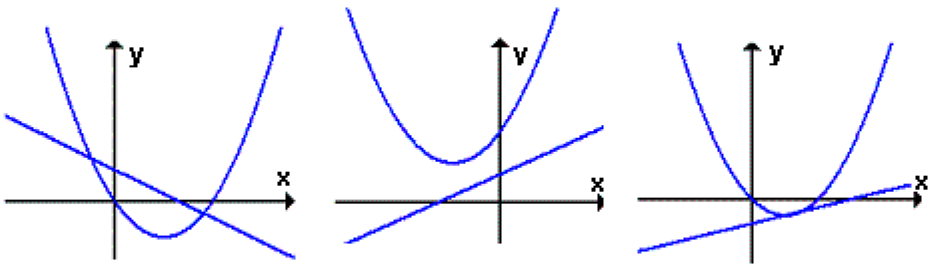
$$y = mx + p$$

encontrar la intersección entre ambas gráficas es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + p \end{cases}$$

Al resolver el sistema puede suceder que las gráficas:

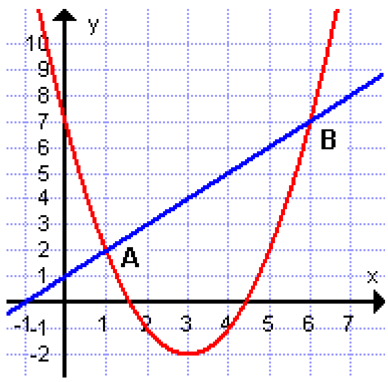
- Se corten en dos puntos
- No se corten
- Se corten en un solo punto.




Veamos un ejemplo

**Ejemplo 12**.

Graficamos en un mismo sistema de coordenadas la recta $y = x + 1$ y la parábola $y = x^2 - 6x + 7$




Los gráficos se cortan en dos puntos.

Del gráfico podemos decir que

A = (1; 2) y B = (6; 7)

A veces no es tan sencillo encontrar los puntos de intersección de las curvas a partir del gráfico.

Para obtener las coordenadas de los puntos planteamos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 7 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Igualamos las dos ecuaciones:

$$x^2 - 6x + 7 = x + 1$$

$$x^2 - 6x + 7 - x - 1 = 0$$

Calculamos las raíces de la ecuación cuadrática mediante la fórmula resolvente, encontramos que

$$x_1 = 1 \ \text{ y } x_2 = 6$$

que son las abscisas de los puntos de intersección entre la parábola y la recta.

Para hallar la ordenada de cada punto, reemplazamos en una de las ecuaciones dadas, por ejemplo en $y = x+ 1$

- Si $x_1 = 1$ es $y = 1 + 1 = 2$
- Si $x_2 = 6$ es $y = 6 +1 = 7$

Por lo que los puntos de intersección son:

$$A = (1; 2) \quad y\ (6; 7)$$