

# Rectas y planos

Unidad 4

# Respuestas

Álgebra A (62)  
Cátedra: Rosa María Escayola

**.UBAXXI**

**Nota.** Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.

### Rectas y planos

#### Ejercicio 1.

a)  $x^2 + y^2 = 1$

b)  $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$

c)  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 10$

#### Ejercicio 2.

El punto no se encuentra en la circunferencia.

#### Ejercicio 3.

a)  $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{15}}{2}$   $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{15}}{2}$

b)  $y_1 = 4 + \sqrt{3}$ ,  $y_2 = 4 - \sqrt{3}$

#### Ejercicio 4.

a) Centro =  $\{(2; -4, 5)\}$ ,  $r = \frac{\sqrt{109}}{2}$

b) Centro =  $\{(-5; 1)\}$ ,  $r = \sqrt{48}$

c) Centro =  $\{(0; 7)\}$ ,  $r = 5$

#### Ejercicio 5.

■ Centro =  $\{(5; 4)\}$ ,  $r = \sqrt{10}$

■ Centro =  $\{(2; \frac{5}{2})\}$ ,  $r = \frac{5}{2}$

■ Intersecciones:  $(4; 1)$  y  $(2; 5)$

#### Ejercicio 6.

a) Se tocan en el punto  $(1; 1)$ .

b) Los posibles centros son  $(1 - \sqrt{3}; 1)$  y  $(1 + \sqrt{3}; 1)$ .

### Elipse

#### Ejercicio 7.

$a = 10$ ,  $b = 6$

#### Ejercicio 8.

a)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $F_1 = (\sqrt{7}, 0)$  y  $F_2 = (-\sqrt{7}, 0)$

b)  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ ,  $F_1 = (1, -1)$  y  $F_2 = (1, 7)$

**Ejercicio 9.**

- a) (i)  $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{49} = 1$   
 (ii)  $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$   
 (iii)  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$
- b) (i)  $F_1 = (3; -3 + 2\sqrt{6}); F_2 = (3; -3 - 2\sqrt{6})$   
 (ii)  $F_1 = (-2 + \sqrt{5}; -1); F_2 = (-2 - \sqrt{5}; -1)$   
 (iii)  $F_1 = (4; 3 + 4\sqrt{2}); F_2 = (4; 3 - 4\sqrt{2})$
- c) (i)  $e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$   
 (ii)  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$   
 (iii)  $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

**Ejercicio 10.**

- a)  $\frac{(x+1)^2}{225} + \frac{(y-3)^2}{289} = 1$   
 b)  $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

**Ejercicio 11.**

- a)  $\frac{(x-1)^2}{84} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$   
 Y en su ecuación general:  $25x^2 + 21y^2 - 50x - 84y - 1991 = 0$
- b)  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$   
 Y en su ecuación general:  $25x^2 - 50x + 9y^2 - 36y = 164$

**Ejercicio 12.**

Datos: si centramos la elipse en (0,0) su curva es:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$   
 Si hallamos la intersección de la curva con  $y = 2$  se obtiene:  $x = \frac{5}{3}\sqrt{5}$   
 Entonces:  $r = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{5}$

**Ejercicio 13.**

Los datos del problema son la excentricidad  $e = 0,017$  y el semieje mayor  $a = \frac{3}{2}10^8$ . Con estos datos es posible obtener la semidistancia focal  $c$ . La distancia mínima se halla como:  $a - c = 147450000$  y la distancia máxima se halla como:  $a + c = 152550000$

Hipérbola

**Ejercicio 14.**

Datos: los focos son los puntos A y B, lo que nos permite conocer que  $c = 50$ . El valor constante  $4 = 2a$ . Con estos datos es posible hallar  $b$ . La ecuación de la hipérbola es:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2496} = 1$

**Ejercicio 15.**

- a) Focos:  $F_1 = (-\sqrt{13}; 0)$  y  $F_2 = (\sqrt{13}; 0)$ . Excentricidad:  $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$   
 b) Focos:  $F_1 = (-4; 2 - \sqrt{13})$  y  $F_2 = (-4; 2 + \sqrt{13})$ . Excentricidad:  $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

**Ejercicio 16.**

- a) Los focos están sobre el eje  $x$ . Luego  $c = 13$ . Por lo que  $169 = a^2 + b^2$  y  $169 - a^2 = b^2$   
 La ecuación de la hipérbola es:  $\frac{x^2}{(169-b^2)} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  
 Si reemplazamos por las coordenadas del punto M en la ecuación planteada, podemos hallar el valor de  $b$ . Se obtiene  $b^2 = 48$  y  $a^2 = 121$ . Por lo que la ecuación de la hipérbola es:  $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{48} = 1$ .

- b)  $2c = 26$  por lo que  $c = 13$ . Como el eje que contiene a los focos es paralelo al eje  $y$  la ecuación de la hipérbola será:  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ . Dado que la excentricidad es  $e = 2$ ,  $6 = \frac{c}{b} = \frac{13}{b}$ . Es posible despejar  $b = 5$  y con la relación pitagórica entre  $a, c, b$  encontrar que  $a = 12$ . Luego la ecuación de la hipérbola es:  $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ .
- c) La asíntota plantea que la relación  $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ . Es posible expresar  $b = \frac{3a}{4}$ . Reemplazando esta expresión en la ecuación de la hipérbola y, al mismo tiempo, por las coordenadas de  $M = (2, 1)$  se obtiene la ecuación:  $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{\frac{9a^2}{16}} = 1$ . Resolviendo esta ecuación se obtiene:  $a^2 = \frac{20}{9}$ ,  $b^2 = \frac{5}{4}$  y la ecuación de la hipérbola es:  $\frac{x^2}{\frac{20}{9}} - \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$ .

**Ejercicio 17.**

- a) El centro es  $(1, 1)$ ;  $b = 2$  y  $c = \sqrt{13}$ . Puede hallarse  $a$  a través de la igualdad:  $c^2 = a^2 + b^2$ . Se obtiene  $a^2 = 9$ . Luego la ecuación de la hipérbola es:  
 Escrita en forma canónica:  $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$   
 Ecuación general:  $9y^2 - 4x^2 - 18y + 8x = 31$
- b) Por el gráfico es posible saber el centro de la hipérbola  $(2, -3)$  y que  $a = 2$ . Como la pendiente es  $\frac{b}{a} = 1,5$  se despeja  $b = 3$ . Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:  $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$   
 Su ecuación general es:  $9x^2 - 36x - 4y^2 - 24y = 36$

**Ejercicio 18.**

Datos:  $F_1 = (-80; 0)$ ,  $F_2 = (80; 0)$ . Si  $P = (x; y)$  es un punto de la hipérbola debe verificarse que  $dist(F_1, P) - dist(F_2, P) = 100$ . La ecuación que se obtiene es:  $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{3900} = 1$ .  
 La distancia pedida es  $c - a = 80 - 50 = 30$  millas

**Parábola**

**Ejercicio 19.**

- a) El vértice es el punto medio entre el foco y la directriz:  $V = (0; 0)$ . La distancia entre el vértice y el foco es  $\frac{p}{2} = 4$ .  
 Luego la ecuación de la parábola es  $16(x - 0) = (y - 0)^2$ , o lo que es lo mismo,  $16x = y^2$
- b) El vértice es el punto  $V = (0; 6)$  y  $\frac{p}{2} = 2$   
 Luego la ecuación de la parábola es:  $8(y - 6) = (x - 0)^2$ .

**Ejercicio 20.**

- a)  $F = (0; 1, 5)$ . Directriz  $y = -1, 5$ . Vértice  $V = (0; 0)$
- b)  $F = (2, 25; 0)$ . Directriz  $x = -2, 25$ . Vértice  $V = (0; 0)$
- c)  $F = (-5; 1, 5)$ . Directriz  $y = 0, 5$ . Vértice  $V = (-5; 1)$
- d)  $F = (-7; 3)$ . Directriz  $x = -5$ . Vértice  $V = (-6; 3)$

**Ejercicio 21.**

- a)  $-20(x - 0) = (y - 0)^2$
- b)  $4(y + 3) = (x + 1)^2$
- c)  $-10(y - 9, 5) = (x - 8)^2$
- d)  $5, 5(x + 0, 125) = (y + 1)^2$

**Ejercicio 22.**

A través del procedimiento de completar cuadrados es posible escribir la igualdad  $y^2 + 2x + \alpha y + \beta = 0$  como:  
 $[y - (-\frac{\alpha}{2})]^2 = -2[x - (\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta}{2})]$ . Resta comparar esta expresión con la forma canónica de la parábola.  
 Si  $y_v = -\frac{3}{2}$  entonces  $-\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{2}$ . De esta igualdad se obtiene  $\alpha = 3$   
 Si  $x_v = \frac{1}{2}$  entonces  $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$ . De esta igualdad se obtiene  $\beta = \frac{5}{4}$

**Ejercicio 23.**

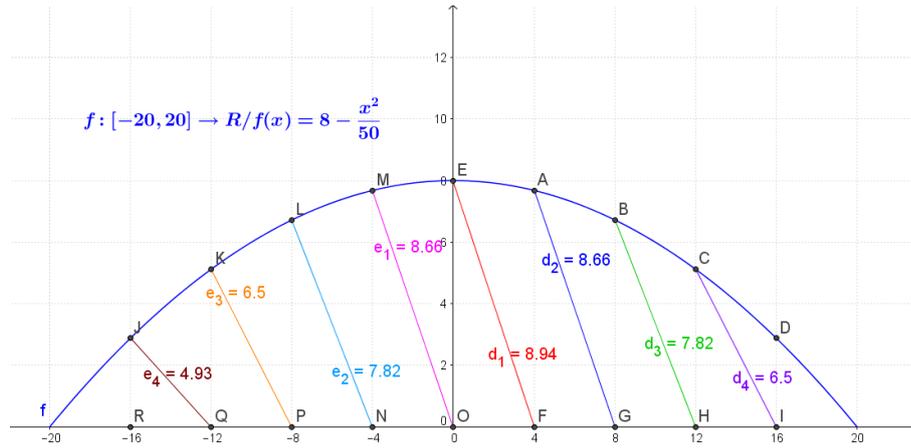
Si consideramos una parábola con vértice en (0;0), y que pasa por los puntos (-7,5;8) y (7,5;8) podemos escribir la ecuación:

$(x - 0)^2 = 2p(y - 0)$ . Si reemplazamos por el punto (7,5,8) obtenemos que  $2p = \frac{225}{32}$   
 Con lo cual:  $\frac{p}{2} = \frac{225}{128}$ . La lamparita hay que colocarla en el foco de coordenadas:  $(0, \frac{225}{128})$

**Ejercicio 24.**

La altura máxima permitida es 4,5 mts.

**Ejercicio 25.**



**Ejercicio 26.**

$p = \frac{9}{2}, q = \frac{33}{4}$ .