

## Rectas y planos

Unidad 2

## Respuestas y Tip's

Álgebra A (62)  
Cátedra: Rosa María Escayola

**.UBAXXI**



**Nota.** Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.

### Rectas y planos

#### Ejercicio 1.

- a)  $P_1$  pertenece a la recta.  $P_2$  NO pertenece a la recta.  $P_3$  NO pertenece a la recta.  $P_4$  pertenece a la recta.  $P_5$  NO pertenece a la recta.
- b)  $P_1$  pertenece a la recta.  $P_2$  pertenece a la recta.  $P_3$  pertenece a la recta.  $P_4$  NO pertenece a la recta.  $P_5$  NO pertenece a la recta.

#### Ejercicio 2.

- a)  $(x; y) = \lambda(3, 1) + (-1, 2)$
- b)  $(x; y) = \lambda(2, -1) + (-1, -3)$
- c)  $(x; y) = \lambda(-2, 3) + (1, -4)$
- d)  $(x; y) = \lambda(3, -2)$

#### Ejercicio 3.

- a) (i)  $(x; y) = \lambda(1, -2) + (0, 1)$   
(ii)  $(x; y) = \lambda(1, \frac{2}{3}) + (0, -\frac{5}{3})$   
(iii)  $(x; y) = \lambda(1, 0) + (0, -2)$   
(iv)  $(x; y) = \lambda(0, 1) + (3, 0)$
- b) (i)  $2x - 3y = -1$   
(ii)  $y = 3$   
(iii)  $x = 2$

#### Ejercicio 4.

- a)  $(x; y; z) = \lambda(0, 1, 0) + (0, 2, 4)$
- b)  $(x; y; z) = \lambda(1, 0, -3) + (-2, 3, 4)$
- c)  $(x; y; z) = \lambda(0, 0, 1) + (1, 2, 3)$
- d)  $(x; y; z) = \lambda(1, 1, 1) + (1, 9, -3)$

#### Ejercicio 5.

- a)  $P_1$  pertenece al plano.  $P_2$  NO pertenece al plano.  $P_3$  pertenece al plano.  $P_4$  NO pertenece al plano.  $P_5$  pertenece al plano.
- b)  $P_1$  pertenece al plano.  $P_2$  NO pertenece al plano.  $P_3$  pertenece al plano.  $P_4$  pertenece al plano.  $P_5$  NO pertenece al plano.

#### Ejercicio 6.

- a)  $-2x + 2y + z = 8$
- b)  $(x; y; z) = \lambda(1, 0, \frac{1}{2}) + \mu(0, 1, -\frac{3}{2}) + (0, 0, \frac{1}{2})$

#### Ejercicio 7.

- a)  $(x; y; z) = t(1, 0, 1) + s(1, 1, 5) + (3, 2, 7)$  y  $z = x + 4y - 4$
- b)  $(x; y; z) = t(1, 0, 0) + s(0, 1, 0) + (1, 2, 1)$  y  $z = 1$
- c)  $(x; y; z) = t(1, 0, 4) + s(0, 1, -4) + (0, 0, 1)$  y  $-4x + 4y + z = 1$

d)  $(x; y; z) = t(1, 0, 1) + s(0, 1, 1) + (0, 0, 1)$  y  $x + y - z = -1$

**Ejercicio 8.**

- a) No son colineales.
- b) No son coplanares.

**Ejercicio 9.**

- a)  $a = 10$
- b) No existen valores de  $a$  que cumplan lo pedido.

**Ejercicio 10.**

- a)  $\vec{u} = (0, 0, 0)$
- b)  $\vec{u} = (10, -5, 5)$
- c)  $\vec{u} = (-10, 5, -5)$
- d)  $\vec{u} = (0, -6, 0)$

**Ejercicio 11.**

- a)  $\vec{a} = (19, 1, 7)$  No es único, hay infinitos.
- b)  $\vec{b} = t(32, 0, -8)$ , con  $t \in \mathbb{R}$
- c)  $\vec{c} = \left(\frac{8}{\sqrt{17}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$ . No es único, hay un vector más que cumple lo pedido.

**Ejercicio 12.** —

Intersección de rectas y planos

**Ejercicio 13.**  $L \cap \Pi = \emptyset, L' \cap \Pi = \{(0, 1, 2)\}$

**Ejercicio 14.**

- a) Son concurrentes. Existe un único plano que las contiene.
- b) Son paralelas no coincidentes. Existe un único plano que las contiene.
- c) Son coincidentes. Existen infinitos planos que las contienen.
- d) Son alabeadas. No existe ningún plano que las contenga.

**Ejercicio 15.**

- a)  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ .
- b)  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 = \Pi_2$ .
- c)  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, -3, -5) + (0, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Ejercicio 16.**

- a)  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} 2y - 3z = -15 \\ 4x + 7z = 29 \end{cases}$

**Ejercicio 17.**

- a)  $(3, 2, 2)$
- b)  $\emptyset$

## Distancias y ángulos entre rectas y planos

**Ejercicio 18.**

- a)  $\angle(L_1, L_2) = \frac{\pi}{2}$
- b) Las rectas de ecuaciones vectoriales  $(x; y) = t(1, 0) + (2, 1)$  o  $(x; y) = s(0, 1) + (2, 1)$

**Ejercicio 19.**

- a)  $L_1 \cap L_2 = \{(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2})\}$
- b) El plano de ecuación vectorial  $(x; y; z) = t(1, 2, 3) + s(1, -2, 1) + (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2})$  y  $\angle(L_1, L_2) = \frac{\pi}{2}$

**Ejercicio 20.**

- a) —
- b)  $L_3$  de ecuación vectorial  $(x; y; z) = t(1, 2, -1) + (-1, 1, 3)$  y  $\angle(L_3, L_2) = \frac{\pi}{2}$

**Ejercicio 21.**

$(3\sqrt{2} + 2, -3\sqrt{2} + 1, -1)$  y  $(-3\sqrt{2} + 2, 3\sqrt{2} + 1, -1)$

**Ejercicio 22.**

- a)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$
- b)  $2\sqrt{2}$
- c)  $\sqrt{\frac{32}{3}}$

**Ejercicio 23.**

- a) Una normal para  $\Pi$  es  $N = (7, 8, 6)$ , que puede hallarse haciendo el producto vectorial entre los vectores directores de  $\Pi$ . Esta es la misma normal que  $\Pi'$  (que aparece en los coeficientes de la ecuación implícita).
- b) Para la recta  $L$  de ecuación vectorial  $(x; y; z) = \lambda(7, 8, 6)$ , se tiene  $P = (\frac{189}{149}, \frac{216}{149}, \frac{162}{149})$  y  $Q = (-\frac{14}{149}, -\frac{16}{149}, -\frac{12}{149})$
- c)  $d(P, Q) = \frac{29}{\sqrt{149}}$ . Este número representa la distancia entre  $\Pi$  y  $\Pi'$ .
- d) No importa la elección de la recta  $L$ . La distancia entre dos planos paralelos se pueden medir entre dos puntos cualesquiera (uno de uno y otro de otro) que se encuentren en un segmento perpendicular a ambos.

**Ejercicio 24.**

- a) Hallando una ecuación vectorial para  $L_1$ , se ve que  $(1, 0, 2)$  es un posible vector director para dicha recta.
- b) Para  $\Pi$  de ecuación implícita  $x + 2z = -5$ , se tiene que  $Q = (1, 1, -3)$ .
- c)  $d(P, Q) = 1$ . Este número representa la distancia entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ .

**Ejercicio 25.**

- a) Una normal de  $\Pi$  es  $(1, 1, 1)$ , y este vector es perpendicular al vector director  $(-1, 0, 1)$  de  $L$  (pues el producto escalar entre ambos vectores da 0). Por lo tanto,  $L$  es paralela a  $\Pi$ .
- b) Para  $L'$  de ecuación vectorial  $\lambda(1, 1, 1) + (1, 1, 2)$ , se tiene  $Q = (0, 0, 1)$ .
- c)  $d(P, Q) = \sqrt{3}$ . Este número representa la distancia entre  $L$  y  $\Pi$ .

**Ejercicio 26.**

$$k = -\frac{3}{2}.$$

La idea es que al usar que  $L_1$  y  $L_2$  son ortogonales, den dos valores de  $k$  (debería dar  $-1$  y  $-\frac{3}{2}$ ), mientras que con  $k = -1$  el plano es paralelo a la recta, en el otro caso no. Luego la recta que se obtiene con  $-\frac{3}{2}$  interseca al plano, y se cumple la segunda condición.

**Ejercicio 27.**

- a) No se intersecan y no son paralelas.
- b)  $\Pi_1$  de ecuación vectorial  $\lambda(3, 2, 1) + \mu(2, -3, 0) + (4, 3, 0)$  y  $\Pi_2$  de ecuación vectorial  $t(3, 2, 1) + s(2, -3, 0) + (0, 0, -1)$ .
- c) Usando la recta  $L$  de ecuación vectorial  $\lambda(3, 2, -13)$ , se tiene que  $L \cap \Pi_1 = \{(\frac{27}{91}, \frac{18}{91}, -\frac{117}{91})\}$  y  $L \cap \Pi_2 = \{(\frac{39}{182}, \frac{26}{182}, -\frac{169}{182})\}$ . Luego,  $d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{5}{\sqrt{182}}$ . Este número representa la distancia entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ .

## Proyecciones y simetrías

**Ejercicio 28.**

- a)  $(-2, -1)$
- b)  $(-4, 6)$
- c)  $(-3, -1, 4)$
- d)  $(2, 3, 2)$

**Ejercicio 29.**

- a)  $(1, 2)$
- b)  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

**Ejercicio 30.**

- a)  $(2, 1)$
- b)  $(-2, 0)$
- c)  $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

**Ejercicio 31.**

- a)  $(x, y) = (2, 2) + \lambda(2, 2)$
- b)  $(x, y) = (1, 2) + \lambda(4, 8)$
- c)  $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(9, 3)$

**Ejercicio 32.**

- a)  $(3, -2, 4)$
- b)  $(2, \frac{8}{5}, \frac{4}{5})$
- c)  $(\frac{11}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{13}{7})$

**Ejercicio 33.**

- a)  $R = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$$b) L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(3, 0, 3) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\}$$

$$c) \pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - 3z + \frac{5}{2} = 0\}$$

**Ejercicio 34.**

a) Sobre el eje  $x$ :  $(5; 0)$ . Sobre el eje  $y$ :  $(0; -3)$

b)  $(1; 1)$

c)  $\left(\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}; 0\right)$

d)  $\left(-\frac{9}{13}; 1; -\frac{6}{13}\right)$

**Ejercicio 35.**

a)  $P = (x_0, 4 - x_0)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$

b) Hay muchas soluciones. Si llamamos a  $\vec{w} = (a, b, c)$  y asumimos que  $a, b, c$  son distintos de cero, entonces una posible solución se obtiene tomando  $c = 3 - 2a - 3b$  para valores de  $a, b$  que verifiquen  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

**Ejercicio 36.**

$$x - 2y + 2z = -1$$

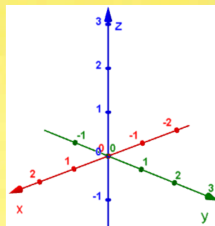
**Ejercicio 37.**

$$\vec{z} = (2; -6; -4) \text{ y } \vec{z} = (-2; 6; 4)$$

Tip's

**Ejes cartesianos en  $\mathbb{R}^3$**

La convención que elegimos para nombrar a los ejes cartesianos en el espacio es la que se indica en el siguiente gráfico:



Tip 1.

**Vectores asociados a rectas y planos**

El vector asociado a una recta siempre indica su dirección y es paralelo a la misma.

Por ejemplo:

$$r : \{X \in \mathbb{R}^2 : X = P_0 + k\vec{v}, k \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{v} // r$$

El vector asociado a un plano es normal al mismo.

Por ejemplo:

$$\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$$

$$\vec{N} = (a; b; c) \perp \pi$$

Tip 2.