**Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes**

Unidad 5

# Propiedades de los determinantes: Ejemplos

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

## Propiedades de los determinantes: ejemplos

1. Intercambio de filas.
   Si $B$ es la matriz que se obtiene de $A$ al intercambiar la posición de dos filas, entonces se cumple que:
   $$det(B) = -det(A)$$

   Ejemplo

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

   La matriz $B$ se contruye con las filas 1 y 3 intercambiadas:

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} 1\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 5 - 2 = 3$$

   Luego se verifica que: $\det(B) = 3 = -(-3) = -\det(A)$

2. Multiplicación de una fila por un número real no nulo.
   Si $B$ es la matriz que se obtiene de $A$ al multiplicar una fila por $k \neq 0$, entonces se cumple que:
   $$det(B) = k \cdot det(A)$$

   Ejemplo

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

   La matriz $B$ se contruye multiplicando por $k = 5$ a la fila 1:

   $$B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -5 - 10 = -15$$

   Luego se verifica que: $\det(B) = -15 = 5(-3) = \det(A)$

3. El determinante de una matriz con una fila (o columna) de ceros vale 0 (cero).

   Ejemplo

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} 0\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

4. El determinante de una matriz que tiene dos filas (o columnas) iguales vale 0 (cero).

   Ejemplo

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

5. El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta, es decir:

$$det(A) = det(A^t)$$

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A^t) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

Luego se verifica que: $\det(A) = -3 = -3 = \det(A^t)$

6. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes, es decir:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -14 - 2 = -16$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) \underbrace{=}_{por\ C_1} -1\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 25 + 23 = 48$$

Luego se verifica que: $\det(A \cdot B) = 48 = -3(-16) = \det(A) \cdot \det(B)$

7. Si $det(A) \neq 0$ entonces existe $A^{-1}$ y $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

<u>Ejemplo</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

La matriz inversa de $A$ es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\det(A^{-1}) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(0) = -\frac{1}{3}$$

Luego se verifica que: $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{1}{\det(A)}$

8. $det(A^k) = det(A)^k$ siendo $k \neq 0$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\det(A^3) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -3\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -3 - 40 + 16 = -27$$

Luego se verifica que: $\det(A^3) = -27 = (-3)^3 = [\det(A)]^3$

9. Si $A$ es una matriz diagonal, su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = -2(3(-7) - 0 \cdot 0) = -2 \cdot 3 \cdot (-7) = 42$$

10. Si $A$ es una matriz triangular inferior (o superior), su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplos

- $A$ es una matriz triangular superior (sus elementos por debajo de la diagonal son 0).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot (-7) = 42$$

- $B$ es una matriz triangular superior (sus elementos por encima de la diagonal son 0).

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 10 & -7 \end{pmatrix} \to \det(B) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} 4\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot (-7) = -140$$

11. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces $det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \det(A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$4 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \to \det(4 \cdot A) \underbrace{=}_{\text{por } F_1} -4\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -192$$

Luego se verifica que: $\det(4 \cdot A) = -192 = 64 \cdot (-3) = 4^3 \cdot \det(A)$