Prácticas 1 a 9

Álgebra A 62

Ingeniería

2016

Práctica 1

Conjuntos

Definiciones y propiedades

Conjuntos, pertenencia e inclusión

Un *conjunto* es una colección de objetos. A los objetos que forman un conjunto, se los llama *elementos* del conjunto. En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.

Algunos conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, el conjunto de los números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de los números enteros;
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de los números racionales (fracciones);
- $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.

Se define el *conjunto vacío* como el conjunto que no tiene ningún elemento, y se lo representa con el símbolo $\emptyset$.
Si A es un conjunto y a es un elemento de A, se dice que a *pertenece* a A, y se escribe $a \in A$.
Si un objeto b no pertenece a un conjunto A, escribimos $b \notin A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso, se escribe $A = B$.

Dos formas de describir un conjunto son por *extensión* y por *comprensión*. Por ejemplo, el conjunto A que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede definir como sigue:

- (por *extensión*) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- (por *comprensión*) a través de una propiedad que verifican los elementos del conjunto y ningún otro: $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

Para definir un conjunto por comprensión, usualmente se necesita dar un conjunto *referencial*, también llamado conjunto *universal* y que se nota $\mathcal{U}$, de donde se eligen los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto referencial es $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

Se dice que un conjunto B *está incluido* en un conjunto A, o que B es un *subconjunto* de A, si cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, se nota $B \subseteq A$. Si B no es un subconjunto de A, escribimos $B \nsubseteq A$.
Observamos que:

- $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A;
- si A, B y C son conjuntos tales $C \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $C \subseteq A$;
- $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Unión, intersección y complemento

Sean A y B dos conjuntos.

- La *unión* de A y B, que se nota $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B (o sea, los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, incluyendo los que pertenecen a ambos); es decir, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- La *intersección* de A y B, que se nota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; es decir, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.
- La *diferencia* de conjuntos "A menos B", que se nota $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B; es decir, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

  Observamos que, en general, las diferencias $A \setminus B$ y $B \setminus A$ no son iguales.

Si A es un conjunto incluido en un conjunto universal $\mathcal{U}$, el *complemento* de A (en $\mathcal{U}$), que notaremos A^c, es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A; es decir, $A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $2 \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$

b) $3 \notin \{1, 2, 3, 6, 7\}$

c) $\{2, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 6, 7\}$

d) $\{2, 6, 8\} \subseteq \{1, 2, 3, 6, 7\}$

e) $\{2, 4\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 6, 7\}$

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $2 \in \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 8\}$

b) $\{3, \pi\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 8\}$

c) $\{2, 3\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 5x + 6 = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

Ejercicio 3. Describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $\{1,2,3,6,7\} \cup \{2,4,6\}$ *b)* $\{1,2,3,6,7\} \cup \{1,2,3\}$ *c)* $\{1,2,3,6,7\} \cup \{9,10,11\}$

d) $\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}$ *e)* $\{1,2,3,6,7\} \cap \{1,2,3\}$ *f)* $\{1,2,3,6,7\} \cap \{9,10,11\}$

g) $(\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}) \cup \{1,2,5\}$ *h)* $\{1,2,3,6,7\} \cap (\{2,4,6\} \cup \{1,2,5\})$

i) $(\{1,2,3,6,7\} \cup \{1,2,5\}) \cap (\{2,4,6\} \cup \{1,2,5\})$

j) $(\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}) \cup (\{1,2,3,6,7\} \cap \{1,2,5\})$

Ejercicio 4. Describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b,e\}$ *b)* $\{a,b,e\} \setminus \{a,b,c,d\}$

c) $(\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b,e\}) \cup \{a,b,e\}$ *d)* $(\{a,b,e\} \setminus \{a,b,c,d\}) \cup \{a,b,c,d\}$

e) $\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\}$ *f)* $\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b\}$ *g)* $\{a,b,c\} \setminus \{d,e\}$

h) $\{a,b,c,d\}^c$, siendo $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ el conjunto universal

i) $\{a,b,c,d\}^c$, siendo $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e\}$ el conjunto universal

Ejercicio 5. Graficar en la recta los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 9\}$ *b)* $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 4 \text{ y } x \leq 7\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 4 \text{ o } x \geq 7\}$ *d)* $D = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 < x \leq 5\}$

e) $A \cap D$ *f)* $B \cap C$ *g)* $B \cup D$ *h)* $B \cap D$

i) $D \setminus A$ *j)* $B \setminus D$ *k)* B^c, siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

Ejercicio 6. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 8, \ 1 \leq y \leq 4\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x \leq 8, \ 1 \leq y < 4\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3 < x \leq 5, \ 2 \leq y < 3\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5 \leq x \leq 9, \ 2 \leq y < 3\}$

e) $A \setminus B$ *f*) $A \setminus C$ *g*) $A \setminus D$ *h*) $C \setminus D$

i) $A \cap C$ *j*) $A \cup C$ *k*) $A \cap D$ *l*) $A \cup D$

Ejercicio 7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ el conjunto universal.

a) $\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \ \text{ y } \ x < 2\}^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0 \ \text{ o } \ x > 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 1 \ \text{ y } \ x < 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 1 \ \text{ o } \ x \geq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 2 \ \text{ o } \ x \geq 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 2 \ \text{ o } \ x < 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : \ x < 2 \ \text{ o } \ x > 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2 \ \text{ y } \ x \leq 3\}$

Práctica 2

Números Complejos

Definiciones y propiedades

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi /\, a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1\}$$

La representación $z = a + bi$ de un número complejo se llama la *forma binómica* de z, a se llama la *parte real* de z y escribimos $\operatorname{Re}(z) = a$, y b se llama la *parte imaginaria* de z y escribimos $\operatorname{Im}(z) = b$.
Dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z = w \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w).$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la suma y el producto de z y w en la forma

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \qquad \text{(suma)}$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{(producto)}$$

La suma y el producto son asociativos y conmutativos y, además, vale la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Notación: $a + (-b)i = a - bi$, $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, llamaremos *conjugado* de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$ y *módulo* de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifican:

a) $z\overline{z} = |z|^2$ *b*) si $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propiedades de la conjugación:

C1) $\overline{\overline{z}} = z$ C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ C3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

C4) si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ C5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ C6) $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)\, i$

Propiedades del módulo:

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$ M2) $|z| = |\overline{z}|$ M3) $|zw| = |z|\,|w|$

M4) $|z| = |-z|$ M5) si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ M6) si $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, llamaremos *argumento* de z al único número real $\arg(z)$ que verifica

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi, \qquad \cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

La *forma polar o trigonométrica* de z es

$$z = |z| \left(\cos(\arg(z)) + i \ \operatorname{sen}(\arg(z))\right)$$

Se verifican:

- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$ con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, entonces $|z| = \rho$ y $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = \tau\,(\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta))$, con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y $\tau, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, entonces

$$z = w \iff \rho = \tau \quad \text{y} \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$, la *notación exponencial* de z es $z = |z|\,e^{i\alpha}$.

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$.
Si $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = |w|\,(\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta))$, entonces

$$zw = |z|\,|w|\,(\cos(\alpha + \beta) + i \ \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

es decir,

$$|z|\,e^{i\alpha} \ |w|\,e^{i\beta} = |z|\,|w|\,e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Como consecuencia, se deduce que:

$$\begin{array}{rclcrcl}
z^{-1} & = & |z|^{-1}\,(\cos(-\alpha) + i \ \operatorname{sen}(-\alpha)) & \quad \text{es decir,} & z^{-1} & = & |z|^{-1}\,e^{-i\alpha} \\
\overline{z} & = & |z|\,(\cos(-\alpha) + i \ \operatorname{sen}(-\alpha)) & \quad \text{es decir,} & \overline{z} & = & |z|\,e^{-i\alpha} \\
\dfrac{z}{w} & = & \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i \ \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) & \quad \text{es decir,} & \dfrac{z}{w} & = & \dfrac{|z|}{|w|}e^{i(\alpha-\beta)} \\
z^n & = & |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i \ \operatorname{sen}(n\alpha)) & \quad \text{es decir,} & z^n & = & |z|^n\,e^{i(n\alpha)}
\end{array}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$. Si z es una raíz n-ésima de w, entonces

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

para algún número entero k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Dar la forma binómica de z en los casos

a) $z = 1 - i(2+i)$

b) $z = (1+2i)(3-i)^2$

c) $z = (3+4i)^{-1}$

Ejercicio 2. Hallar todos los números complejos z que satisfacen

a) $(1+i)z + 5 = 2 - 3i$

b) $i(z-5) = (1+3i)z$

c) $\dfrac{z-i}{z} = 2+i$

d) $\dfrac{2+i}{z} = \dfrac{2+2i}{z+1}$

Ejercicio 3. Dar la forma binómica de todos los números complejos z que satisfacen

a) $\overline{z}(z+1) = 11 + 3i$

b) $\mathrm{Re}(z).\,\overline{z} = 4 + 6i$

c) $\mathrm{Im}(z).\,z + i\,\mathrm{Re}(z).\,\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).\mathrm{Im}(\mathrm{z})$

Ejercicio 4. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano, sin calcularlos, los números complejos $\overline{z}$, $-z$, $2z$, $-3w$, $-\overline{w}$, $z+w$, $w-z$ y $\overline{z} - 3w$.

Ejercicio 5. Sabiendo que $2+2i; -2+2i; -2-2i$ y $2-2i$ son los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes cuyas diagonales se cortan en $z = 0$, hallar $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}$ que sean los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes del mismo tamaño que el dado pero cuyas diagonales se corten en $z = 3 + 5i$.

Ejercicio 6. Calcular $|z|$ en los casos

a) $z = i(4-3i)$

b) $z = (1+i)^8$

c) $z = \sqrt{5}\,(1+2i)^{-1}\,\overline{(1+i)}$

d) $z = 1 - i(2+i)$

e) $z = (-7i)\,\left|(1-i)^{-1}\right|$

f) $z = \sqrt{2}(-1+i)^{-1}(3+i)^8$

Ejercicio 7. Dado $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos tales que $w = a + bi$ sea múltiplo real de z y la diagonal del rectángulo de vértices 0, a, w y bi en el plano complejo mida *a*) 7 *b*) 15 *c*) k, donde k es un número real positivo dado.

Ejercicio 8. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leq 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| = 2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| \leq 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| \geq 2\}$

f) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1\}$

g) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 1\}$

h) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(z) < 2\mathrm{Re}(z) + 1 \text{ y } |z| < 1\}$

Ejercicio 9. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 1| = |z + i|\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}/\ |z - 1 - 2i| \leq 2 \text{ y } \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) - 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}/\ |3z - 3| \geq 6 \text{ y } |z| \leq |z - 1 - i|\}$

Ejercicio 10. Escribir en forma binómica todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

a) $z^2 = 3 + 4i$

b) $z^2 = -8i$

c) $z^2 - 2z + 5 = 0$

d) $z(z + 1) = 5 + 5i$

Ejercicio 11. Sin calcular $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$, representar en el plano complejo

a) $z = 2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$

b) $z = 3\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$

c) $z = \cos\frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi$

d) $z = 5\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$

Ejercicio 12. Hallar el módulo y el argumento de z y expresar a z con la notación exponencial en los casos

a) $z = \sqrt{7}$

b) $z = -2$

c) $z = -6i$

d) $z = 2 + 2i$

e) $z = \sqrt{3} + i$

f) $z = -1 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3\left(\cos\frac{17}{5}\pi + i \operatorname{sen}\frac{17}{5}\pi\right)$

h) $z = \cos\frac{7}{4}\pi - i \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi$

i) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$

j) $\cos\frac{\pi}{5} + i\,\cos\frac{\pi}{5}$

Ejercicio 13. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C}/1 \leq |z| \leq 4 \text{ y } \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}/\ |z-1|\ = 3 \text{ y } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) > \text{Im}(z) \text{ y } \pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi\}$

Ejercicio 14. Hallar la forma polar de z en los casos

a) $z = (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

b) $z = (-3i)(-1+i)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

c) $z = (-1+\sqrt{3}i)^8(2+2i)^{-1}$

d) $z = \left(\text{sen}\frac{2\pi}{7} - i\,\cos\frac{2\pi}{7}\right)^5$

Ejercicio 15. Hallar la forma binómica de z en los casos

a) $z = (-\sqrt{3}+i)^{16}(1-i)$

b) $z = \dfrac{-2i}{(1+\sqrt{3}i)^{11}}$

c) $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{(-1-i)^{31}}$

d) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{15}$

Ejercicio 16. Hallar las raíces n-ésimas de w y expresarlas con la notación exponencial en los casos

a) $n = 3$, $n = 4$ y $n = 6$, $\quad w = 1$

b) $n = 6$, $\quad w = -1$

c) $n = 4$, $\quad w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $n = 5$, $\quad w = i$

e) $n = 3$, $\quad w = 5 - 5i$

f) $n = 4$, $\quad w = -8 + 8\sqrt{3}i$

Ejercicio 17. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $z^6 = -1$

b) $z^3 = \overline{iz^2}$

c) $z^8 = \left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

d) $z^4 = -\bar{z}^4$

e) $z^3 + 4i\,|z| = 0$

f) $z^6 = (1+2i)^6$

Ejercicio 18.

a) Hallar los vértices de un hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 y que tiene a 2 como uno de sus vértices.

b) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 2.

c) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 4.

d) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que se obtiene rotando en sentido antihorario el hexágono hallado en $a)$ en un ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

e) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que tiene dos de sus vértices sobre el eje imaginario puro.

f) Hallar los vértices del hexágono regular que tiene a $w = 3 + 4i$ como uno de sus vértices y que está inscripto en una circunferencia de centro $z_0 = 0$.

Práctica 3

Polinomios

Definiciones y propiedades

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ significa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Un *polinomio* con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_j \in \mathbb{K}$ para $j = 0, \ldots, n$.
Indicaremos con $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y consideramos en $\mathbb{K}[x]$ las operaciones de suma y producto usuales.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$, decimos que a_n es el *coeficiente principal* de P y definimos el *grado* de P como $\mathrm{gr}(P) = n$. Por convención, el polinomio nulo no tiene grado.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ y $Q \neq 0$,

- $\mathrm{gr}(PQ) = \mathrm{gr}(P) + \mathrm{gr}(Q)$;
- si $P + Q \neq 0$, entonces $\mathrm{gr}(P + Q) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$;
- si $\mathrm{gr}(P) \neq \mathrm{gr}(Q)$, entonces $\mathrm{gr}(P + Q) = \mathrm{máx}\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$.

Algoritmo de división. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, existen únicos $S, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P = QS + R \quad \text{y} \quad R = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q).$$

El polinomio R se llama el *resto* de la división de P por Q. Cuando este resto es el polinomio nulo (es decir, si $P = QS$), decimos que P es divisible por Q o que Q divide a P.

Dados $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$, y $z \in \mathbb{K}$, llamaremos *especialización* de P en z al número $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_jz^j$ y diremos que z es *raíz* de P si $P(z) = 0$.

Teorema del resto. Sean $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$. Entonces el resto de la división de P por $x - z$ es igual a $P(z)$. En particular, z es raíz de P si y sólo si $x - z$ divide a P.

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z_1, z_2, \dots, z_r$ son r raíces distintas de P, entonces

$$P = (x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_r).Q$$

para algún $Q \in \mathbb{K}[x]$.
En consecuencia, si $P \in \mathbb{K}[x]$ tiene grado n, entonces P tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{K}$.

Teorema de Gauss. Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, con $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de P (con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común), entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Teorema fundamental del álgebra. Si $P \in \mathbb{C}[x]$ y $\text{gr}(P) \geq 1$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es raíz de P si y sólo si $\overline{z}$ es raíz de P.

Sea $P \in \mathbb{K}[x]$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $z \in \mathbb{K}$ es una raíz de P de *multiplicidad* k si existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ con $Q(z) \neq 0$ tal que $P(x) = (x - z)^k Q(x)$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, el *polinomio derivado* de P es $\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \in \mathbb{K}[x]$.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$,

a) $\partial(P + Q) = \partial P + \partial Q$ *b)* $\partial(PQ) = (\partial P).Q + P.(\partial Q)$ *c)* $\partial(ax^0) = 0$

Escribimos $\partial^2 P = \partial(\partial P)$, $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P) = \partial(\partial(\partial P))$, $\partial^m P = \partial(\partial^{m-1} P) = \partial(\partial(\dots(\partial P)))$.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, vale que z es una raíz de P de multiplicidad k si y sólo si

$$P(z) = 0,\ \partial P(z) = 0,\ \partial^2 P(z) = 0,\ \dots, \partial^{k-1} P(z) = 0 \ \text{ y } \ \partial^k P(z) \neq 0.$$

Dados un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de f, el *orden de contacto* entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el punto $(x_0, 0)$ es la multiplicidad de x_0 como raíz de f. Más generalmente, si $f, g \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_0) = g(x_0)$, el orden de contacto entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto de abscisa x_0 es la multiplicidad de x_0 como raíz de $f - g$.

Polinomio interpolador de Lagrange. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ y sean $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio $L \in \mathbb{K}[x]$, con $L = 0$ o $\text{gr}(L) \leq n$, que satisface $L(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Este polinomio es

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) \ \text{ donde } \ L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Calcular PQ, $P+3Q$ y $(P+2x)xQ^2$, indicando en cada caso el coeficiente principal y el grado.

a) $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x) = x^4$

b) $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $Q(x) = -x^2 + 1$

c) $P(x) = x^2 - x$, $Q(x) = -x^2 + 3$

d) $P(x) = -2x + 3$, $Q(x) = x + 2$

Ejercicio 2. Determinar el grado del polinomio P sabiendo que $(1 + x^2 Q)xP$ tiene grado 11 y que Q es un polinomio de grado 5.

Ejercicio 3. Hallar, si existen, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + 8x = a + bx^2 + c(x+1)(x+3)$.

Ejercicio 4. Hallar el cociente y el resto de la división de P por Q.

a) $P = 2x^4 - 15x^2 - 5x + 1$, $Q = x - 3$

b) $P = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$, $Q = x^2 + 1$

c) $P = 4x^5 + x^3 + x + 1$, $Q = 2x^2 - x + 1$

Ejercicio 5. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ es divisible por $x^2 + a$.

Ejercicio 6. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que

a) $P(2) = -6$, para $P(x) = ax^2 - x$

b) $P(x) = 2x^4 - 3ax^2 + 1 - 5a$ tenga a cero como raíz

c) $P(-1) = a$, para $P(x) = ax^2 + ax + 5$

Ejercicio 7. Determinar todas las raíces de P en los casos

a) $P(x) = x^2 + (1-i)x + 2 - 2i$

b) $P(x) = ix^6 - 1$

Ejercicio 8. Determinar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$ y escribirlo como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

a) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x - 7$

c) $P(x) = x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

d) $P(x) = (5x^4 + 5)(x^2 - 2)$

e) $P(x) = 4x^4 - 9x^2 - 9$

f) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4$

g) $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$, sabiendo que i es raíz

h) $P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 22x + 5$, sabiendo que $1 + 2i$ es raíz

Ejercicio 9. Determinar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$.

a) $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 4$, sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

b) $P(x) = x^3 - (3 + 3i)x^2 + 8ix + 4 - 4i$, sabiendo que tiene una raíz real.

Ejercicio 10. Determinar la multiplicidad de z como raíz de P.

a) $P(x) = (x^2 + 4)(x - 2)^3(x^3 - 8)$, $z = 2$

b) $P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$, $z = i$

c) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$, $z = 1$

d) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$, $z = \frac{1}{2}$

Ejercicio 11. Sabiendo que P tiene una raíz múltiple, hallar todas sus raíces y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

a) $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$

b) $P(x) = x^3 + 3ix^2 + 4i$

Ejercicio 12. Sea $P(x) = 3x^5 + ax^4 + ax + 3$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que -1 sea raíz múltiple de P. Para el valor hallado, calcular la multiplicidad de -1 como raíz de P y escribir a P como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

Ejercicio 13.

a) Hallar $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mínimo que tenga a -1 como raíz, a $2+3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(1) = 20$.

b) Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tenga a -1 y a $2+3i$ como raíces y que verifique $P(2) = 3$.

c) Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ mónico de grado mínimo que tenga a -1 como raíz y a $2+3i$ como raíz doble.

Ejercicio 14. Determinar el orden de contacto de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto de abscisa x_0.

a) $f(x) = -3x^5 + x^3 + 2x^2$, $g(x) = 0$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = x^5 + 5x^3 - 3x^4 - 7x^2 + 6x - 2$, $g(x) = 0$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, $g(x) = -2x^2 + x + 1$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 5$, $g(x) = -2x^3 + 1$, $x_0 = -2$

Ejercicio 15.

a) Encontrar la ecuación de una parábola que pase por los puntos $(1,-1)$, $(0,1)$ y $(2,2)$.

b) Encontrar un polinomio P de grado a lo sumo 3 que verifique $P(1) = 2$, $P(0) = -1$, $P(2) = 2$ y $P(-1) = 1$.

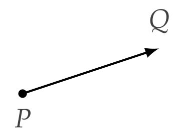
Práctica 4

Álgebra vectorial - Primera parte

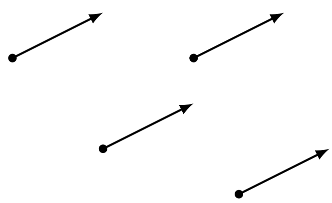
Definiciones y propiedades

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

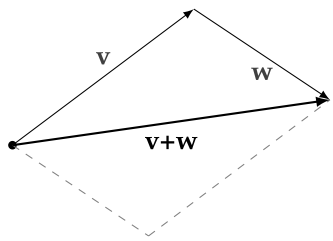
Una flecha que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades) es un *vector*. Para dar un vector necesitamos un *origen* (P) y un *extremo* (Q) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.



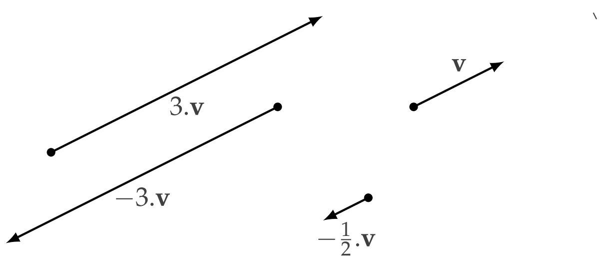
Vectores equivalentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido. Los siguientes vectores son todos equivalentes:



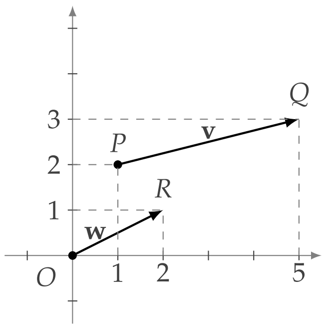
Los vectores se pueden sumar. La suma, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:



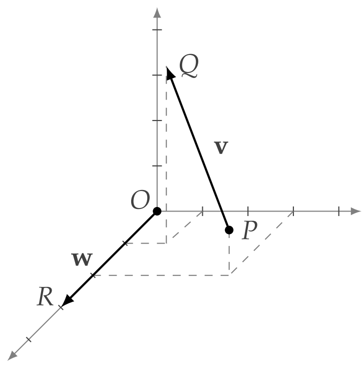
También se puede multiplicar un vector por un número (escalar). El resultado es un vector de igual dirección que el dado; el número afecta la longitud y el sentido del vector.



En el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas) por lo que, para dar un vector, bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (1,2)$ y $Q = (5,3)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0)$ y $R = (2,1)$.



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (2,3,1)$ y $Q = (1,1,4)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0,0)$ y $R = (3,0,0)$.



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a 0 ($O = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y $O = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$), identificando entonces el punto P con la flecha $\overrightarrow{OP}$.

Dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2)$.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3)$.

Escribimos $P - Q = P + (-1).Q$ (es decir, resta coordenada a coordenada).

En este contexto vale:

a) $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{RS}$ si y sólo si $S - R = Q - P$. En particular, $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{OR}$ si y sólo si $R = Q - P$.

b) $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos* o tienen igual dirección si existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tal que $Q - P = k.(S - R)$.
Si $k > 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen igual sentido; si $k < 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen sentidos opuestos.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Generalizando lo anterior, llamaremos *punto* o *vector* en el espacio $\mathbb{R}^n$ a una n-upla $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son números reales. Estos números son las *coordenadas* de X.

Si $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ decimos que

$$P = Q \text{ si y sólo si } p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_3 = q_3,\ \ldots,\ p_n = q_n.$$

Definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3, \ldots, p_n + q_n)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3, \ldots, cp_n)$.

El vector con todas sus coordenadas cero se notará $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

Propiedades. Las siguientes propiedades para la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector valen en cualquier espacio de vectores $\mathbb{R}^n$:

1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

2) $P + Q = Q + P$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, $c.(P + Q) = c.P + c.Q$

4) Si $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1 + c_2).P = c_1.P + c_2.P$ y $(c_1c_2).P = c_1.(c_2.P)$

5) $O + P = P$

6) $1.P = P$

7) $P + (-1).P = O$ Notación: $-P = (-1).P$

8) $0.A = O$

Producto interno o escalar

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se define el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Propiedades.

PE1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

PE2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{w} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

PE3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w})$

PE4. Si $\mathbf{v} = O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v} \neq O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Diremos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Producto vectorial

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ se define como el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$. Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es un vector en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades.

PV1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

PV2. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$

$(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{z} \times \mathbf{v})$

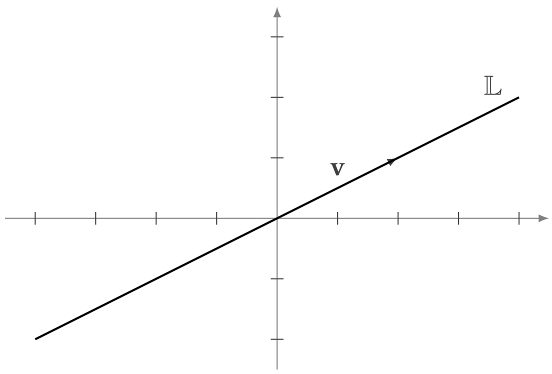
PV3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (k.\mathbf{w})$

PV4. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = O$

PV5. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$

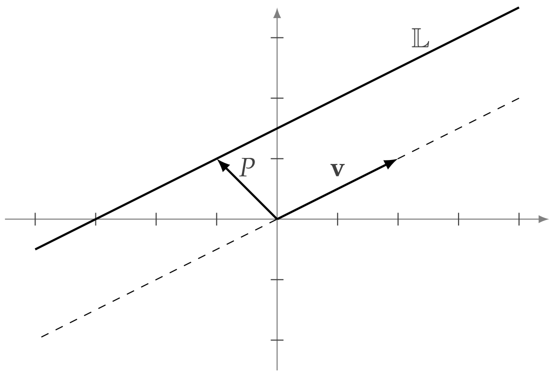
Rectas

Dado en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$, el conjunto de todos sus múltiplos es la recta $\mathbb{L}$ que tiene por dirección a $\mathbf{v}$ y que pasa por O.



Una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ es $X = \lambda.\mathbf{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
La recta $\mathbb{L}$ resulta ser el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2 x - v_1 y = 0$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* de $\mathbb{L}$.

Ahora bien, dados en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P, una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.



Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $P = (p_1, p_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación paramétrica se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$.
Si $c = v_2 p_1 - v_1 p_2$, la recta $\mathbb{L}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2 x - v_1 y = c$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* para $\mathbb{L}$.
Para describir una recta en $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar una ecuación paramétrica del tipo $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ o utilizar una ecuación implícita del tipo $ax + by = c$.

De manera similar, dados en $\mathbb{R}^3$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $X = (x, y, z)$, tenemos que $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un vector $\mathbf{N}$ y un punto Q de $\mathbb{R}^3$, la *ecuación* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a $\mathbf{N}$ es

$$\Pi : \quad (X - Q) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

El plano Π es el conjunto de todos los puntos X tales que $X - Q$ es perpendicular a $\mathbf{N}$. Diremos que $\mathbf{N}$ es un *vector normal* al plano. Si $X = (x, y, z)$ y $\mathbf{N} = (a, b, c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi : \quad ax + by + cz = d \quad \text{donde} \quad d = Q \cdot \mathbf{N}.$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π.
Si los puntos P, Q y R no están alineados y pertenecen al plano Π, resulta que Π es el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha.(P - R) + \beta.(Q - R) + R \quad \text{para } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Ésta es una *ecuación paramétrica* del plano Π. Un vector normal $\mathbf{N}$ a Π es cualquier vector no nulo perpendicular simultáneamente a $P - R$ y a $Q - R$. Por ejemplo, puede tomarse $\mathbf{N} = (P - R) \times (Q - R)$.

Una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ puede considerarse como intersección de dos planos que la contienen. Por lo tanto, para dar ecuaciones implícitas para una recta se necesitan por lo menos dos ecuaciones.
Una forma de obtener ecuaciones implícitas a partir de una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$ del tipo $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$ es buscar dos vectores con distintas direcciones (a, b, c) y (d, e, f) perpendiculares a (v_1, v_2, v_3) simultáneamente. Entonces la recta $\mathbb{L}$ estará dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ dx + ey + fz = dp_1 + ep_2 + fp_3. \end{cases}$$

Posiciones relativas

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son la misma recta,
- *transversales* si se cortan en un punto,
- *paralelas* si sus direcciones coinciden.

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden no cortarse ni ser paralelas; en este caso, se dicen *alabeadas*.

Si las direcciones de dos rectas son perpendiculares, decimos que las rectas son *perpendiculares* u *ortogonales*.

Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son el mismo plano,
- *transversales* si se cortan en una recta,
- *paralelos* si sus vectores normales lo son.

Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ son

- *paralelos* si la dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano,
- *ortogonales* si la dirección de la recta es paralela al vector normal al plano.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3, 1)$ y $Q = (1, -5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P + \frac{1}{2}Q$.

c) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P - 2.Q$.

d) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 \ / \ b \in \mathbb{R}\}$

e) Determinar geométricamente para qué valores de (x, y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x, y)$.

Ejercicio 2.

a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 0)$, $R = (1, 1, 1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.

b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

c) Hallar, si es posible, a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 2, 3) = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 0) + c.(1, 1, 1)$.

Ejercicio 3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

a) Si $P = (2, 3, 0, -2)$ y $Q = (1, 4, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P + 3.Q$ y $S = 2.P - \frac{1}{3}.Q$.

b) Si $P = (1, 0, -3, 0, 2)$ y $Q = (0, -1, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.

Ejercicio 4. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, -1)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar $\mathbf{w}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (2, 5)$ y $\mathbf{w}_3 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?

c) Graficar $\mathbf{z}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{z}_2 = (-2, -5)$ y $\mathbf{z}_3 = (3, 1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?

d) Graficar $-\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ y $-\mathbf{v}_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar un vector por -1?

Comparar con el ejercicio 4 de la práctica 2.

Ejercicio 5. Dados en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $P_1 = (-2, 1)$, $P_2 = (-2, 3)$ y $P_3 = (-3, 3)$ y el vector $\mathbf{t} = (4, 2)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $P_1 + \mathbf{t}$, $P_2 + \mathbf{t}$ y $P_3 + \mathbf{t}$ y el triángulo de vértices $P_1 - \mathbf{t}$, $P_2 - \mathbf{t}$ y $P_3 - \mathbf{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\mathbf{t}$? ¿Y restarlo?

c) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $2.P_1$, $2.P_2$ y $2.P_3$ y el triángulo de vértices $\frac{1}{2}.P_1$, $\frac{1}{2}.P_2$ y $\frac{1}{2}.P_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Comparar con los ejercicios 4, 5 y 7 de la práctica 2.

Ejercicio 6. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).

a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $\mathbf{w} = (-6, 12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ de dos formas distintas).

b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6,12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5,13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.

c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2,-4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2,4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2,3)$ respectivamente?

d) Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (2,1,5)$. Probar que, si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarle las mismas dos operaciones a $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$ se llega a $(\lambda+2,1,2\lambda+5)$.

Ejercicio 7.

a) En cada caso, graficar los vectores de $\mathbb{R}^2$ involucrados, calcular el producto escalar $\cdot$ indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1,-1)\cdot(2,4); \quad (1,3)\cdot(-6,2); \quad (1,2)\cdot(1,2); \quad (-1,0)\cdot(0,1)$$

b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales:

$$(1,3,5)\cdot(3,0,-2); \quad (-1,2,1)\cdot(6,1,4); \quad (2,4,-2)\cdot(-3,-6,3); \quad (1,0,0)\cdot(0,1,1)$$

c) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(5,-3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?

d) Encontrar dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,1,2)$ que no sean paralelos entre sí.

e) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1,2,1)$ y a $(1,-3,0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

f) Dados $\mathbf{v} = (1,2)$; $\mathbf{w} = (-1,5)$ y $\mathbf{z} = (3,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

g) Dados $\mathbf{v} = (1,1,1)$; $\mathbf{w} = (1,-1,3)$ y $\mathbf{z} = (2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$:

a) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5.\mathbf{w}$.

b) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}+\mathbf{z}$ y a $3.\mathbf{w}-2.\mathbf{z}$.

c) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

d) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{w}-3.\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{z}$.

Ejercicio 9.

a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da $(0,0,0)$?

$$(1,3,5)\times(3,0,-2); \quad (-1,2,1)\times(6,1,4); \quad (2,4,-2)\times(-3,-6,3);$$

$$(0,0,0)\times(1,-1,3); \quad (a,b,c)\times(ka,kb,kc)$$

b) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$ y $\mathbf{z}=(2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\times\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\times\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\times(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\times(3.\mathbf{w}); \quad (5.\mathbf{v})\times\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\times(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z})$$

¿Qué relaciones se cumplen?

c) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$, calcular

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}; \quad (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$$

¿Cómo resulta ser el vector $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ con respecto a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$?

d) Dar un vector que sea ortogonal a $(1,3,5)$ y a $(3,0,-2)$ simultáneamente.

Ejercicio 10. Sea $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(3,2)$ y $(0,0)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$. ¿Es única?

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(0,0)$, $(-6x,-2x)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(300,200) + (3,2)$?

Ejercicio 11. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-2,2)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar dos ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}$.

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,1)$, $(4,0)$, $(0,0)$, $(-3x+1, x+1)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-27,9) + (-14,6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda.(27,-9) + (-27,9)$?

Ejercicio 12. Un móvil se desplaza por el plano $\mathbb{R}^2$ de forma tal que, en tiempo t, se encuentra en el punto $t.(3,-2) + (1,1)$.

a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t = 0$.

b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.

c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t, calcular $P(0)$ y $P(t+1) - P(t)$ para un valor genérico de t. ¿Qué relación tienen con los datos dados?

d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x = 16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?

e) Repetir los distintos ítems con un móvil que se desplaza según la ecuación $t.(6,-4) + (1,1)$ para $t \geq 0$ y con otro que se desplaza según $t.(\frac{3}{2}, -1) + (1,1)$ para $t \geq 0$. ¿Cómo son las trayectorias? ¿En qué se diferencian los movimientos?

Ejercicio 13. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2) + (3,2)$:

a) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

b) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(-1,-6)$.

c) Graficar $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$? Justificar.

Ejercicio 14. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $(-1,2)$ y $(0,3)$.

a) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_1$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

b) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_2$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(1,2)$.

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$?

Ejercicio 15. Sean $P=(4,9)$, $Q=(-6,5)$ y $\mathbb{L}: X=\lambda.(1,2)$. Hallar todos los puntos $R\in\mathbb{L}$ tales que:

a) el triángulo PQR sea rectángulo en P.

b) el triángulo PQR sea rectángulo en R.

Ejercicio 16. Dadas $\mathbb{L}_1 : X=\alpha.(5,-1)+(2,1)$, $\mathbb{L}_2$ la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-3,2)$, $\mathbb{L}_3$ la recta que pasa por los puntos $(5,5)$ y $(5,-1)$, $\mathbb{L}_4 : X=\beta.(1,0)+(2,1)$ y $\mathbb{L}_5 : x+3y=-1$:

a) Dar ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ y $\mathbb{L}_4$.

b) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}_5$.

Ejercicio 17. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : -x+3y=2$, $\mathbb{L}_2 : -2x+6y=-3$ y $\mathbb{L}_3 : x-3y=0$:

a) Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?

b) Notar que las ecuaciones de las rectas anteriores pueden escribirse usando el producto escalar: $\mathbb{L}_1 : (-1,3)\cdot(x,y)=2$, $\mathbb{L}_2 : (-2,6)\cdot(x,y)=-3$ y $\mathbb{L}_3 : (1,-3)\cdot(x,y)=0$ ¿Qué relación tienen entre sí los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$ que aparecen en las ecuaciones?

c) Buscar un vector dirección distinto para cada una de las rectas. ¿Qué relación tienen los vectores dirección encontrados con los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$?

d) Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por $(-1,1)$.

Ejercicio 18.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L} : x=2$ que pasa por $(3,8)$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L} : X=\lambda.(2,3)+(1,2)$ que pasa por $(5,-2)$.

Ejercicio 19. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y decidir sus posiciones relativas:

a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1,3) + (2,0)$.

b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.

c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-4,1) + (2,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-2,1) + (0,-1)$.

d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-3,2) + (5,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(6,-4) + (0,1)$.

e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,1) + (1,1)$

Ejercicio 20. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1,-7)$.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_3$ y es paralela a $\mathbb{L}_1$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta $\mathbb{L}'$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

Ejercicio 21. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) tiene dirección $(1,-1,2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene dirección $(1,-1,2)$ y pasa por el punto $(0,2,-3)$.

c) pasa por los puntos $(1,5,1)$ y $(-4,3,2)$.

d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y pasa por el punto $(0,3,2)$.

e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2,-2,1)$ y a $(-3,2,1)$.

f) es perpendicular a $(2,1,0)$ y a $(0,-1,2)$ simultáneamente y pasa por el origen.

g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1,0,2) + (2,1,0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0,3,2)$.

Ejercicio 22. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,-1) + (1,3,5)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por el punto $(3,2,4)$.

a) Hallar el punto de $\mathbb{L}_2$ que tiene coordenada $z = 0$.

b) Decidir si los puntos $(-1,-1,7)$ y $(1,-2,6)$ están en $\mathbb{L}_2$.

Ejercicio 23.

a) Decidir si los puntos $(1,2,-4)$, $(3,-2,0)$ y $(2,0,-2)$ están alineados.

b) Decidir si los puntos $(1,1,3)$, $(2,1,4)$ y $(2,1,5)$ están alineados.

c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2+a,3,-1)$, $(5,a+3,-2)$ y $(a,-1,1)$ están alineados.

Ejercicio 24. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1,1,-2) + (0,0,4)$ y $P = (3,1,0)$. Determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a $\mathbb{L}$.

b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a $\mathbb{L}$.

Ejercicio 25. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,2,1) + (2,3,2) \qquad \mathbb{L}_2 : X = \beta.(0,1,-1) + (1,3,-1)$$
$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2,4,2) + (1,5,0) \qquad \mathbb{L}_4 : X = \delta.(2,4,2) + (3,5,3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

a) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ *b)* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$ *c)* $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$ *d)* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$

Ejercicio 26.

a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1,2,-4) + (-1,3,0)$ y $t.(1,6,-10) + (2,1,0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?

b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento $t.(1,2,0) + (0,3,2)$ y $t.(3,-4,0) + (1,5,7)$. ¿Son paralelas estas trayectorias?

Ejercicio 27. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

a) los planos coordenados xy, xz y yz.

b) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

c) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el punto $(1,1,2)$.

d) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ que pasa por el punto $(-4,3,2)$.

e) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 3$ que pasa por el punto $(0,1,2)$.

f) el plano Π que contiene a los puntos $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ y $(1,1,-1)$.

Ejercicio 28.

a) Decidir si el punto $(1,2,-3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$ y $(5,0,2)$.

b) Decidir si los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$, $(5,0,2)$ y $(0,-1,1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).

Ejercicio 29. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2,-1,-1) + (-7,-1,2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1,4,2) + (1,0,1)$:

a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$ y dar sus posiciones relativas.

b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1,1,1) + (-7,0,-1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.

Ejercicio 30. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0,1,-2)$.

b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1,3,1)$.

c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0,0,1) + (1,3,-2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.

Ejercicio 31. Para cada $k \in \mathbb{R}$, se considera la recta $\mathbb{L}_k : X = \lambda.(k, k+2, 1) + (1,1,1)$.

a) Probar que, si $k \neq k'$, $\mathbb{L}_k$ y $\mathbb{L}_{k'}$ son rectas distintas.

b) Probar que, para cualquier valor de k, $\mathbb{L}_k$ está incluida en el plano $\Pi : x - y + 2z = 2$.

c) Probar que la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,1,0) + (1,1,1)$ es una recta incluida en el plano Π pero no es igual a $\mathbb{L}_k$ para ningún valor de k.

Ejercicio 32.

a) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,1) + (5,4,-3)$.

b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,2) + (0,1,1)$.

c) ¿Existe algún plano que contenga simultáneamente a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,0) + (3,0,-3)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,0,0) + (0,2,3)$?

Ejercicio 33.

a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $P = (2,-1,7)$, $Q = (0,2,3)$ y $R = (1,-1,2)$.

b) Verificar que P, Q y R pertenecen al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$. Deducir que, como P, Q y R no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.

c) Comparar las ecuaciones paramétricas de Π_1 y de Π_2. ¿Son iguales?

d) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_3 paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(1,0,2)$.

Ejercicio 34. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

a) el plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,3,2) + \beta.(2,5,3) + (3,2,1)$ que pasa por el punto $(2,3,1)$.

Ejercicio 35. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones paramétricas de:

a) el plano perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \beta.(0,1,1) + (1,3,-1)$ que pasa por $(3,2,1)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi : 3x + 2y + z = 1$ que pasa por el punto $(1,1,1)$.

Ejercicio 36. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo, dar una ecuación paramétrica de la intersección.

a) $\Pi_1 : y = 0$ y $\Pi_2 : z = 2$

b) $\Pi_1 : x + z = 0$ y $\Pi_2 : y - z = 0$

c) $\Pi_1 : x + y - z = 0$ y $\Pi_2 : x + z = 2$

d) $\Pi_1 : x - z = 0$ y $\Pi_2 : 2x - 2z = 3$

e) $\Pi_1 : x + y - z = 1$ y $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 2$

Ejercicio 37. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que definan la recta pedida.

a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1, 3, 1) + (2, 0, 0)$.

b) $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-3, 0, 1) + (1, 1, 1)$.

c) la recta $\mathbb{L}_3$ perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1, 0, 5) + \beta.(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$ que pasa por $(1, 0, 1)$.

d) la recta $\mathbb{L}_4$ perpendicular al plano $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3$ que pasa por el punto $(2, 1, -1)$.

e) la recta $\mathbb{L}_5$ que pasa por el origen y es paralela a los planos $\Pi_3 : 2x - y + z = 3$ y $\Pi_4 : X = \alpha.(1, 3, 1) + \beta.(0, 2, 1) + (1, -1, 2)$ simultáneamente.

f) la recta $\mathbb{L}_6$ que pasa por el punto $(2, 0, -1)$, está incluida en el plano $\Pi_5 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_6 : X = \alpha.(2, 0, -2) + \beta.(3, 1, 1) + (1, 0, 2)$ simultáneamente.

Ejercicio 38. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dar ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}_1$ y para $\mathbb{L}_2$.

b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Ejercicio 39. En cada caso, hallar la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π y decidir su posición relativa:

a) $\mathbb{L} : X = \alpha.(1, 2, 1) + (2, 2, 3)$
$\Pi : z = 0$

b) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : y = 3$

c) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0, 1, -1) + (0, 1, 1)$
$\Pi : y + z = 2$

d) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0, 1, -1) + (0, 1, 1)$
$\Pi : y + z = 0$.

e) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : X = \alpha.(1, 0, 0) + \beta.(0, 1, -2) + (0, 0, 1)$

Ejercicios surtidos

1. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $P = (1, -3)$ y $Q = (2, -4)$. Hallar b tal que la recta que es paralela a $\mathbb{L}$ y pasa por $(b, 5)$ también pase por $(2, 2)$.

2. Un móvil se desplaza por el plano en línea recta a velocidad constante de forma tal que en tiempo $t = 0$ se encuentra en el punto $(3, 2)$ y en tiempo $t = 2$ se encuentra en el punto $(2, 5)$. Calcular en qué momento cruza la recta $x = -2$ y en qué momento cruza la recta $y = 17$.

3. Un móvil se desplaza por el plano de forma tal que en tiempo t, para $t \geq 0$, se encuentra en el punto $t.(3, -1) + (-13, 31)$. Otro móvil se desplaza por otra recta, partiendo en el instante $t = 0$ del punto $(1, 3)$ a velocidad constante. Si los móviles se encuentran en tiempo $t = 7$, calcular la ecuación de movimiento del segundo. Considerando las direcciones en que se desplazan, ¿cómo son sus trayectorias?

4. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \alpha.(1, 2, -1) + (0, 3, 2)$, hallar todos los valores de k para los cuales la recta que pasa por los puntos $(1, -1, 1)$ y $(4, k, -2)$ es:

a) paralela a la recta $\mathbb{L}$.

b) perpendicular a la recta $\mathbb{L}$.

5. Encontrar el valor de a para que la recta que pasa por $(1, a, 2)$ y $(1, 5, 4)$ sea paralela a la recta dada por $\mathbb{L} : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$.

6. Sean $\mathbb{L} : X = \alpha.(1, -1, 3) + (0, 2, 1)$ y $P = (1, 2, -3)$.

a) Hallar una ecuación implícita del plano Π que contiene a $\mathbb{L}$ y al punto P.

b) Hallar ecuaciones implícitas de la recta $\mathbb{L}'$ perpendicular a Π que pasa por P.

c) Calcular $\mathbb{L} \cap \Pi$ y $\mathbb{L}' \cap \Pi$.

7. Si $\mathbb{L} : X = \alpha.(k^2 + 1, k, k + 7) + (0, 2, 1)$ y $\Pi : x + 2y - 3z = 2$, determinar todos los valores de k para los que $\mathbb{L}$ y Π son paralelos.

8. Sean $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (-2, 1, 1)$ y $\mathbb{L} : X = \alpha.(0, -1, 3) + (1, 1, -1)$. Dar una ecuación del plano Π que contiene a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por P y a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por Q.

9. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,-2,2) + (0,1,-1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(0,1,-1) + (-2,1,-1)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1,3,-1) + (0,-5,0)$. Encontrar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$, $\mathbb{L}_3 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$ y $\mathbb{L}$ es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

10. Dar una ecuación paramétrica y ecuaciones implícitas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que está incluida en el plano coordenado xy y es perpendicular y transversal a la recta $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,-2,1) + (-2,0,1)$.

Práctica 5

Álgebra vectorial - Segunda parte

Definiciones y propiedades

Norma, ángulo y producto mixto

La *norma* de un vector $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es la longitud del vector.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, su norma es la distancia entre el punto (v_1, v_2) y el origen de coordenadas $O = (0, 0)$. Por el teorema de Pitágoras, resulta ser $\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
De manera análoga, la norma de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
La norma puede expresarse en función del producto escalar: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
A partir de esta definición, se puede calcular la *distancia entre dos puntos* P y Q (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): es la norma de la diferencia $P - Q$; en símbolos, $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

Propiedades. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores, entonces

- $\|k\,\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad triangular o de Minkowski*).
- $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

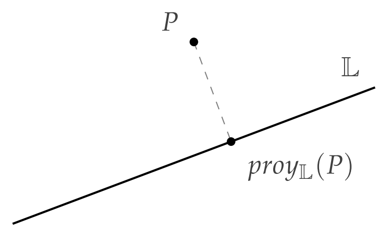
El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el menor de los dos ángulos determinados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Es el único ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ que verifica $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|}$.

Si los puntos O, P y Q en $\mathbb{R}^3$ no están alineados, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ determinan un paralelogramo. El área de este paralelogramo es la norma del producto vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es el número real que se obtiene al hacer el producto vectorial de los dos primeros y al resultado multiplicarlo escalarmente por el último vector; en símbolos, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
Si los puntos O, P, Q y R en $\mathbb{R}^3$ no son coplanares, los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ determinan un paralelepípedo. El volumen de este paralelepípedo es el módulo del producto mixto entre los vectores. Este producto mixto es cero si y solo si O, P, Q y R son coplanares.

Proyección ortogonal y distancia

Dados un punto P y una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$, la *proyección ortogonal de P sobre $\mathbb{L}$* es el punto $proy_{\mathbb{L}}(P)$ que resulta de intersecar a la recta $\mathbb{L}$ con la recta perpendicular que pasa por P.



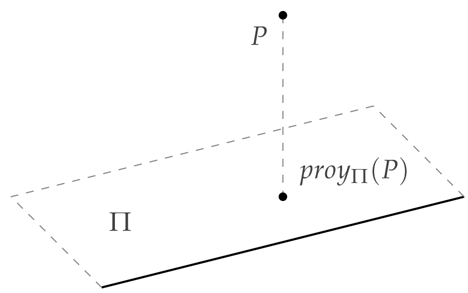
Si $\mathbb{L} : ax + by = c$, la proyección ortogonal de P se puede calcular como

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{c - P \cdot (a,b)}{\|(a,b)\|^2}\,(a,b) + P$$

y, si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q)\cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Similarmente, dados un punto P y un plano Π en $\mathbb{R}^3$, la *proyección ortogonal de P sobre Π* es el punto $proy_{\Pi}(P)$ que resulta de intersecar a Π con la recta perpendicular que pasa por P.



Si $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$ (vector normal a Π), se tiene que

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|^2}\,\mathbf{N} + P.$$

Si P es un punto y $\mathbb{L}$ una recta en $\mathbb{R}^3$, la proyección de P sobre $\mathbb{L}$ es la intersección de la recta con el plano perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P. Si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q)\cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Dado un vector $\mathbf{v}$ (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), notaremos $proy_{\mathbf{v}}(P)$ a la proyección ortogonal de P sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$. Se tiene que $proy_{\mathbf{v}}(P) = \dfrac{P \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}$.

La *distancia entre un punto P y una recta $\mathbb{L}$ o un plano Π* es la mínima de todas las distancias entre P y los puntos de la recta o del plano. Geométricamente, se observa que el punto de la recta o del plano que está a distancia mínima de un punto P es la proyección ortogonal de P; en símbolos, $d(P,\mathbb{L}) = \|P - proy_{\mathbb{L}}(P)\|$ y $d(P,\Pi) = \|P - proy_{\Pi}(P)\|$.

A partir de las fórmulas para proyección ortogonal se deducen fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano. Si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{L} : ax + by = c$, entonces

$$d(P, \mathbb{L}) = \frac{|c - P \cdot (a,b)|}{\|(a,b)\|}$$

y si $P \in \mathbb{R}^3$ y $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$, se tiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|d - P \cdot \mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}.$$

Simetrías

- *Con respecto a un punto* Q: El simétrico de un punto P con respecto a Q es el único punto en la recta que pasa por P y Q que es distinto de P y cuya distancia a Q es igual a la distancia entre P y Q.
- *Con respecto a una recta* $\mathbb{L}$: El simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P cuya distancia a $\mathbb{L}$ es igual a la distancia entre P y $\mathbb{L}$; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$. Similarmente, el simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$.
- *Con respecto a un plano* Π: El simétrico de un punto P con respecto a un plano Π en $\mathbb{R}^3$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a Π que pasa por P cuya distancia a Π es igual a la distancia entre P y Π; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\Pi}(P)$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

Ejercicio 2. Graficar en el plano el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 2\}$.

Ejercicio 3. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

a) $(2,3)$ y $(5,1)$

b) $(1,0)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$

c) $(1,0,0)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$

d) $(0,-1,1)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$

Ejercicio 4. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) la norma del vector $(2,-2,k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2,1,1)$ y $(1,-1,k)$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

Ejercicio 5. Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

a) $(1,-1)$, $(-1,\sqrt{3})$ y $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $(1,0,-1)$, $(0,2,0)$ y $(1,-1,2)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes vectores, calcular su norma ρ y el ángulo θ que forma con el semieje positivo de las x:

$$(-1,1), \quad (0,5), \quad (1,-2), \quad (-1,2,2) \quad \text{y} \quad (0,-2,-1)$$

Ejercicio 7. Dados la norma ρ y el ángulo θ que forman los vectores con el semieje positivo de las x (medido en sentido antihorario), hallar sus coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

a) $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

b) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

c) $\rho = 3$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Comparar con la forma polar y la forma binómica de los números complejos.

Ejercicio 8. Para cada vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$, notamos $\theta_{\mathbf{u}}$ al ángulo que forma con el semieje positivo de las x. En cada uno de los siguientes casos, dar las coordenadas del vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:

a) $\|\mathbf{u}\| = 4,\ \theta_{\mathbf{u}} = 0,\ \|\mathbf{v}\| = 2,\ \theta_{\mathbf{v}} = \dfrac{2\pi}{3},\ \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u}\| = 1,\ \theta_{\mathbf{u}} = \dfrac{\pi}{4},\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2},\ \theta_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \dfrac{\pi}{2},\ \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Ejercicio 9. Dar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que verifican:

a) la norma de $\mathbf{v}$ es 3 y los tres ángulos que forma con los semiejes positivos son iguales.

b) $\mathbf{v}$ pertenece al plano yz, su norma es 2 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ con el semieje positivo de las y.

c) $\mathbf{v}$ pertenece al plano xz, su norma es 5 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ con el semieje positivo de las z.

Ejercicio 10. Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\dfrac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

Ejercicio 11. Dados los puntos $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, 0, 3)$ y $R = (0, 1, 2)$, calcular el perímetro, los ángulos interiores y el área de:

a) el paralelogramo de lados PQ y PR.

b) el triángulo PQR. Decidir si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.

Ejercicio 12. Dados los puntos $P = (2, 3, -1)$, $Q = (1, 0, 2)$ y $R = (3, 1, 1)$, hallar un punto S en la recta que pasa por P y Q de modo que PS y PR determinen un paralelogramo de área $10\sqrt{2}$.

Ejercicio 13.

a) En cada caso, calcular el producto mixto indicado de vectores en $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da cero?

$$((2, 0, 0) \times (0, 3, 0)) \cdot (0, 0, 4) \qquad ((-1, 2, 1) \times (6, 1, 4)) \cdot (1, 3, 5)$$

$$((-1, 2, 1) \times (6, 1, 4)) \cdot (-a + 6b, 2a + b, a + 4b) \qquad ((-1, 2, 1) \times (-a, 2a, a)) \cdot (1, 3, 5)$$

b) Los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -3)$ y $(1, 2, -1)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(0, 0, 0)$ forma aristas con los otros tres. Encontrar los otros cuatro vértices y determinar el volumen del paralelepípedo.

c) Los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 4)$, $(5, 1, 2)$ y $(3, -1, 0)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(1, 1, 0)$ forma aristas con los otros tres. Determinar el volumen del paralelepípedo.

Ejercicio 14. Dados los puntos $O = (0, 0, 0)$, $P = (3, 2, 1)$, $Q = (1, 1, 2)$ y $R = (1, 3, 3)$, calcular:

a) el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

b) el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.

Ejercicio 15. Dados los puntos $O = (0, 0, 0)$, $P = (5, 0, 1)$, $Q = (3, -2, 0)$ y $R = (-4, 1, k)$, hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

a) los tres vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ determinen un paralelepípedo de volumen 5.

b) los puntos O, P, Q y R resulten coplanares.

Ejercicio 16. Dado $P = (1, 3, -5)$, encontrar el punto más cercano a P que pertenece a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, -1, 3)$.

b) el plano $\Pi : -2x + y + z = 5$.

Ejercicio 17. Hallar la proyección ortogonal de

a) $P = (5, -3)$ sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.

b) $P = (5, -3)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 1)$.

c) $P = (1, 0, 2)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, -1, 0)$.

d) $P = (-1, 1, 0)$ sobre el plano $\Pi : 2x - 3z = 0$.

Ejercicio 18. Calcular la distancia entre

a) el punto $P = (-1, 0, 3)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1)$.

b) el punto $P = (-1, 0, 2)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, -2, 0) + (0, 1, 1)$.

c) el punto $P = (1, -1, 2)$ y el plano $\Pi : 5x + 2y - z = 0$.

d) el punto $P = (0, -1, 2)$ y el plano $\Pi : -2x + y - z = 3$.

e) el punto $P = (2, 2, 1)$ y el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, -1, 3) + (3, 2, 5)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1, 2, -1) + (1, 3, 2)$.

Ejercicio 19. Calcular la distancia entre

a) las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2, 1) + (3, -1)$.

b) la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, -2, 1) + (0, 1, 1)$ y el plano $\Pi : x + y + z = 3$.

c) los planos $\Pi_1 : 3x + 2y - z = -2$ y $\Pi_2 : 6x + 4y - 2z = 7$.

d) las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1, -2, 0) + (0, 1, 1)$.

Ejercicio 20. Sean $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 3, -1)$ y $\Pi : x + 2y = 0$. Determinar:

a) todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π.

b) todos los puntos de $\mathbb{L}$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π.

Ejercicio 21.

a) Determinar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $proy_{(1,1)}(\mathbf{v}) = (2,2)$.

b) Calcular, si es posible, un vector $\mathbf{w}$ de norma 1 tal que $proy_{\mathbf{w}}(2,3,1) = 3\mathbf{w}$.

Ejercicio 22. Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,-5,2)$ y $\mathbf{w} = (2,-1,2)$, hallar un vector $\mathbf{u}$ paralelo al eje z tal que $\|proy_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}+\mathbf{u})\| = 5$.

Ejercicio 23. Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,1,0)$, $\mathbf{w} = (4,2,-1)$ y $\mathbf{u} = (2,1,-2)$, hallar todos los vectores $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$ simultáneamente y $\|proy_{\mathbf{u}}(\mathbf{z})\| = 2$.

Ejercicio 24. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(0,1,-1) + (0,-1,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1,1,1) + (2,3,0)$. Hallar, si es posible, un plano Π tal que $d(P,\Pi) = 2\sqrt{6}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $P \in \mathbb{L}_2$.

Ejercicio 25. Sean $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 4$ y Π_2 el plano que contiene a los puntos $P = (0,1,1)$, $Q = (3,-1,-1)$ y $R = (3,0,1)$. Hallar todos los puntos del plano Π_1 que están a distancia 2 del plano Π_2.

Ejercicio 26. Sean $\Pi_1 : 7x - 5y - 2z = 0$, $\Pi_2 : 5x - 4y - z = 0$ y $\mathbb{L}$ la recta que pasa por los puntos $P = (-2,3,-3)$ y $Q = (-1,2,-1)$. Hallar todos los planos Π que verifican simultáneamente: $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$ y $d(R,\Pi) = \sqrt{14}$ para todo $R \in \mathbb{L}$.

Ejercicio 27. Sean en $\mathbb{R}^3$ el plano $\Pi : 2x - y + 2z = 4$ y los puntos $P = (2,2,2)$ y $Q = (1,0,1)$. Determinar un plano Π' que contenga a P, a Q y al punto R de Π tal que $d(P,R) = d(P,\Pi)$.

Ejercicio 28. Encontrar el simétrico de

a) $(2,1)$ con respecto a $(0,0)$.

b) $(2,-4)$ con respecto a $(-1,1)$.

c) $(3,-1,0)$ con respecto a $(0,-1,2)$.

d) $(0,-1,0)$ con respecto a $(1,1,1)$.

Ejercicio 29. Encontrar, si es posible, un punto Q tal que

a) el simétrico de $(4,1)$ con respecto a Q es $(-2,3)$.

b) el simétrico de $(3,-1,1)$ con respecto a Q es $(0,0,0)$.

Ejercicio 30. Hallar el simétrico de *a*) $(2,-1)$ con respecto al eje x.

b) $(2,0)$ con respecto al eje y.

c) $(3,-1)$ con respecto a la recta $y=2x-4$.

Ejercicio 31. En cada caso, hallar, si es posible, la recta de modo que los puntos dados sean simétricos respecto de ella.

a) $(1,3),(3,1)$

b) $(-3,4),(5,0)$

c) $(3,-4),(0,5)$

Ejercicio 32. Hallar el simétrico de

a) $(1,0,-4)$ con respecto al punto $(2,-1,0)$.

b) $(0,0,0)$ con respecto a la recta $\mathbb{L}:\lambda.(0,-1,2)+(1,1,0)$.

c) $(-1,1,2)$ con respecto al plano $\Pi: 2x+y-3z=2$.

Ejercicio 33. Dados $P=(-1,0,3)$ y $Q=(2,-1,0)$, hallar:

a) un punto R de modo que P y Q sean simétricos respecto de R.

b) una recta $\mathbb{L}$ de modo que P y Q sean simétricos respecto de $\mathbb{L}$.

c) un plano Π de modo que P y Q sean simétricos respecto de Π.

¿En qué casos el resultado es único?

Ejercicios surtidos

1. Demostrar las siguientes propiedades e interpretarlas geométricamente.

a) $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$ si y solo si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$.

b) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2$ si y solo si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$. (Teorema de Pitágoras.)

2. Sea $P=(2,1,-1)$.

a) Si $\Pi: x+y-z=3$, ¿cuál es el punto de Π a menor distancia de P?

b) Si $\mathbb{L}: X=\lambda.(1,3,1)+(2,2,0)$, ¿cuál es el punto de $\mathbb{L}$ a menor distancia de P?

3. Si $\Pi_1 : 3x+2y-6z=1$ y $\Pi_2 : -3y+4z=3$, hallar todos los puntos $P\in\mathbb{R}^3$ que verifican:

a) $d(P,\Pi_1) = d(P,\Pi_2)$

b) $d(P,\Pi_1) = d(P,\Pi_2) = 2$

4. Sean el plano $\Pi : 2x - 2y + z = 1$ y los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (3,2-1)$. Hallar todos los puntos R y S pertenecientes a Π tales que $PQRS$ es un cuadrado.

5. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(k^2+k,k,k-1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(4,1,-1) + (2k,0,2k)$ y $\Pi : x - 2y + 2z = 3$. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(P,\Pi) = d(Q,\Pi)$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $Q \in \mathbb{L}_2$.

6. Dadas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,1) + (0,1,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,-1,-2) + (1,1,0)$, hallar todos los planos Π tales que $\Pi \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$ y $d(P,\Pi) = \sqrt{2}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$.

7. Encontrar la recta $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{R}^2$ que es paralela a la recta $\mathbb{L}_2$ de ecuación $y = 2x - 3$ y pasa por el simétrico de $(-2,5)$ con respecto al punto $(1,1)$.

8. Hallar el plano Π que es perpendicular a $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,1) + (0,1,1)$ y pasa por el simétrico de $(1,0,1)$ con respecto a la recta $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,-1,-2) + (1,1,0)$.

9. Sean $P = (1,0,2)$ y $Q = (-5,4,0)$. Hallar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que los simétricos de P y Q con respecto a $\mathbb{L}$ sean, respectivamente, $(-1,-2,0)$ y $(1,4,-4)$.

10. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(1,2,-1) + (5,1,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(1,1,-1) + (0,2,1)$. Hallar $P_1 \in \mathbb{L}_1$ y $P_2 \in \mathbb{L}_2$ tales que la distancia entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ sea igual a $d(P_1,P_2)$.

Práctica 6

Matrices y sistemas lineales

Definiciones y propiedades

Matrices

Dados los números naturales m y n, una *matriz* de m filas y n columnas con coeficientes reales es un arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
Llamamos *filas* de A a las n-uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $i = 1, \dots, m$.
Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $j = 1, \dots, n$.
Con esta notación, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ y también $A = (A^{(1)}\ A^{(2)}\ \dots\ A^{(n)})$.
Al número que está en la fila i y la columna j de la matriz A lo llamamos *elemento* ij de A y lo notamos a_{ij}. Escribimos abreviadamente $A = (a_{ij})$.
Notamos $\mathbb{R}^{m \times n}$ al conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la *matriz transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que tiene como filas a las columnas A.
Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *triangular superior (inferior)* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($i < j$, respectivamente) y es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

En el conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$, están definidas la *suma* y el *producto por escalares* de la siguiente manera:
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan elemento a elemento.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times s}$, se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB si y solo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

Propiedades del producto de matrices.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo con respecto a la suma: $\begin{array}{rcl} A(B+C) & = & AB+AC \\ (A+B)C & = & AC+BC \end{array}$
- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para el producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sistemas lineales

Un *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_n$ del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

donde las a_{ij} y las b_i representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ es una solución del sistema si y solo si al reemplazar x_j por s_j para cada $j = 1, \dots, n$, se satisfacen cada una de las m ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución y *compatible* si tiene alguna solución.

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible: $0 \in \mathbb{R}^n$ es una solución, que llamaremos la *solución trivial*.

Si un sistema compatible tiene una única solución es *determinado* y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

La *matriz de coeficientes* del sistema es $A = (a_{ij})$ y la *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema es $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad. Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las ecuaciones.
3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las operaciones anteriores sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1. Multiplicar una de las filas por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las filas.
3. Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).
2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.
4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene solo las propiedades 1., 2. y 3. se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.
El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.
Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas reducida equivalente a A.

Teorema de Rouché-Frobenius. El sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible si y solo si el rango de $(A|\mathbf{b})$ es igual al rango de A.

Notación. El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

puede escribirse $AX = B$, con

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

En adelante, identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ con $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Así, el sistema se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Propiedades. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\mathbf{b} \neq 0)$,

$$\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Si $\mathbf{s}$ es una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (es decir, $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_\mathbf{b}$), entonces

$$\mathbb{S}_\mathbf{b} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Cuando B existe, es única. Se llama la *matriz inversa de* A y la notamos $B = A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

c) $A\mathbf{x} = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Combinación lineal e independencia lineal. Subespacios

Diremos que un conjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *subespacio* si verifica simultáneamente:

- El vector 0 pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{S}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ es un elemento de $\mathbb{S}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{u}$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Por ejemplo, $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son subespacios y, si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\}$ es un subespacio.
Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ en $\mathbb{R}^n$, un vector $\mathbf{w}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ números reales. El conjunto $\mathbb{S}$ de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es un subespacio, que notaremos $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \rangle$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ es un *sistema o conjunto de generadores de* $\mathbb{S}$.
Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$ son *linealmente dependientes* si existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, no todos iguales a 0, tales que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s = 0$. En caso contrario, se dice que

son *linealmente independientes*, es decir, si la **única** forma de escribir al 0 como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es con todos los coeficientes iguales a 0.
Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S} \neq \{0\}$, cualquier conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ que sea linealmente independiente se llama una *base* de $\mathbb{S}$. Todas las bases de $\mathbb{S}$ tienen la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es la *dimensión* de $\mathbb{S}$ y la notaremos $\dim(\mathbb{S})$. Se define también $\dim(\{0\}) = 0$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dadas las siguientes matrices, efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $B + C$ *b)* $2A - E^t$ *c)* BA *d)* BC

e) CB *f)* AB *g)* ED *h)* $A^t E^t$ *i)* $(EA)^t$

Ejercicio 2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a) la segunda fila de AB;

b) la tercera columna de BA;

c) el elemento c_{23} de $C = ABA$.

Ejercicio 3. Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de $\mathcal{S}$?¿Y del sistema homogéneo asociado?

a) $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 0)$ *b)* $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 4)$ *c)* $\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$

d) $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ *e)* $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ *f)* $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

Ejercicio 4. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que $(a, -a, a-1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= (1, 2) \\ \mathbf{b} &= (0, 0) \end{aligned}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= (3, 1, -1) \\ \mathbf{b} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{b} &= (1, 1, 2) \end{aligned}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= (5, 3, 2) \\ \mathbf{b} &= (-1, 1, 2) \\ \mathbf{b} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{b} &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{b} &= (0, 1, 0) \end{aligned}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{aligned} \mathbf{b} &= (1,2,1,2) \\ \mathbf{b} &= (2,0,-1,2) \\ \mathbf{b} &= (0,0,0,0) \end{aligned}$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

a) hallar una solución de $A\mathbf{x} = 0$.

b) hallar una recta de soluciones de $A\mathbf{x} = 0$.

c) hallar cuatro soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. Sean $(1,3,1)$, $(2,2,4)$ y $(2,0,4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

a) Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.

b) Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

a) encontrar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Determinar todas las matrices B que verifican *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G + H; \quad G \cdot H.$$

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Sean

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{-x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que son soluciones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ simultáneamente.

Ejercicio 14. Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\; x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad\; x_2 - x_4 = 0 \\ \qquad\; x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\; x_4 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 15.

a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ tiene solución única.

$$\mathcal{S}: \begin{cases} (k^2-1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ admite solución no trivial.

$$\mathcal{S}: \begin{cases} (k+1)x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k+2)x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Determinar todos los valores de a, b y c para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ es compatible.

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Ejercicio 17. Resolver el sistema para todos los valores de k.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 = k+2 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3kx_2 + 2x_3 - 2x_4 = k \end{cases}$$

Ejercicio 18. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles. En cada caso, para los valores hallados, determinar si el sistema es compatible determinado o indeterminado.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b \end{array}\right)$

Ejercicio 19. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2,0,-1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 20. Hallar todos los valores de k para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es $M = \{\lambda(1,1,0,0) + (2,0,-1,0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 21. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tiene como conjunto de soluciones una recta.

Ejercicio 22.

a) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son puntos, rectas o todo $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0,0) \rangle \qquad \mathbb{S}_2 = \langle (1,1) \rangle \qquad \mathbb{S}_3 = \langle (1,1);(2,2) \rangle$$

$$\mathbb{S}_4 = \langle (1,0);(0,2) \rangle \qquad \mathbb{S}_5 = \langle (1,1);(-1,-1) \rangle$$

b) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio son puntos, rectas, planos o todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle (0,0,0) \rangle \qquad \mathbb{S}_2 = \langle (1,1,1) \rangle \qquad \mathbb{S}_3 = \langle (1,1,1);(2,2,2) \rangle \qquad \mathbb{S}_4 = \langle (1,0,1);(0,2,0) \rangle$$

$$\mathbb{S}_5 = \langle (1,0,1);(0,2,0);(3,5,3) \rangle \qquad \mathbb{S}_6 = \langle (1,0,1);(0,2,0);(a,b,a) \rangle$$

$$\mathbb{S}_7 = \langle (1,0,1);(0,2,0);(3,0,1) \rangle$$

Ejercicio 23. En cada caso, determinar si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ y, en caso afirmativo, escribir a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los generadores dados.

a) $\mathbf{v} = (1, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2, 3); (3, 4) \rangle$

b) $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{2}, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2, -1, -4) \rangle$

c) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \qquad \mathbb{S} = \langle (-1, 1, 3); (2, 1, 0) \rangle$

d) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (2, 1, 1); (1, -1, -1) \rangle$

e) $\mathbf{v} = (-1, 2, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 2, 3); (-3, -2, -4); (0, 4, 5) \rangle$

f) $\mathbf{v} = (x, y, z) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0) \rangle$

Ejercicio 24. Hallar un conjunto de generadores de los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 - 3x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_1 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 0; x_1 - x_2 = 0\}$

Ejercicio 25. Hallar ecuaciones para los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \langle (1, -3) \rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, 0, -1); (-3, 2, 1) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (2, 1, 0); (0, 1, 1); (6, 2, -1) \rangle$

d) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1, 0); (1, 0, 0, 1) \rangle$

Ejercicio 26. Decidir si $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S} = \langle (2, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 + 4x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 3); (0, 1, 0) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 3x_1 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \langle (-1, 2, 0); (1, 1, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (2, -3, 2)(0, 1, 0) \rangle$

e) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (1, 1, -2)(-3, 1, 1) \rangle$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 3x_2 - x_3 = 0\}$

Ejercicio 27. Decidir si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. En caso de que sea linealmente dependiente, escribir alguno de los vectores como combinación lineal de los otros.

a) $\{(1,-1);(-1,2)\}$

b) $\{(1,-1);(-1,2);(3,4)\}$

c) $\{(1,-1);(0,0);(-1,2)\}$

d) $\{(1,-1);(-2,2)\}$

e) $\{(3,2,-1)\}$

f) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(-2,4,2)\}$

g) $\{(1,-2,-1);(-2,4,2)\}$

h) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\}$

i) $\{(1,1,-2);(4,0,-7);(-1,3,1)\}$

j) $\{(1,1,1);(0,1,1);(0,0,1)\}$

Ejercicio 28. Dar una base y la dimensión del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S} = \langle(1,-1);(-1,2)\rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle(1,-1,2);(0,0,1);(-2,2,0)\rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\rangle$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 3x_1 - 2x_2 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; 2x_1 + 2x_2 = 0\}$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 3x_3 = 0; x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

Ejercicio 29. Dar una base y la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0\}$.

b) $\mathbb{S} = \langle(1,-1,3);(2,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

c) $\mathbb{S} = \langle(1,2,-1);(2,3,2)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(0,1,1);(1,0,2)\rangle$.

d) $\mathbb{S} = \langle(1,0,-1);(0,1,1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0; x_1 - 2x_2 = 0\}$.

e) $\mathbb{S} = \langle(2,1,1,-3);(1,0,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0\}$.

Ejercicios surtidos

1. Determinar a y b en $\mathbb{R}$ para que $(1,-1,2,-1)$ sea solución del sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & a & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & 4 \end{array}\right)$. Para los valores hallados, resolver el sistema.

2. Se sabe que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hallar alguna solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que también sea solución de $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$.

3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2kx_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + kx_3 = k \\ 2x_2 + kx_3 = k-2 \end{cases}$$

es una recta contenida en el plano $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$.

4. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\{(2,0,-3)\}$ es el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tales que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$.

6. Sean en $\mathbb{R}^4$ los sistemas

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + ax_3 = b \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen infinitas soluciones comunes. Para los valores hallados, encontrar todas las soluciones comunes.

7. Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ a+1 \end{pmatrix}$, determinar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es compatible.

Para alguno de los valores de a hallados, resolver el sistema y escribir a $\mathbf{c}$ como combinación lineal de las columnas de A.

8. Determinar los valores de k para los cuales $\{(0,1,-2);(1,-1,k);(2,-3,0)\}$ es linealmente dependiente.

9. En cada caso, decidir si el conjunto de vectores dado es una base del subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

a) $\{(1,1,0)\}$

b) $\{(2,0,-1);(-6,0,3)\}$

c) $\{(1,1,0);(1,-1,-1)\}$

d) $\{(2,0,-1);(1,-1,1)\}$

10. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle(1,2,1);(2,-1,-2)\rangle$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$.

Práctica 7

Determinantes

Definiciones y propiedades

El *determinante* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es un número real que se calcula a partir de los elementos de A. Se nota $\det(A)$ ó $|A|$.
Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de A es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Los determinantes de matrices de 4×4 se calculan utilizando determinantes de matrices de 3×3, y, en general, los determinantes de matrices de $n\times n$ se calculan utilizando determinantes de matrices de $(n-1)\times(n-1)$.
Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, el *menor del elemento* a_{ij}, que se nota M_{ij}, se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij}.
Se define el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}.$$

Propiedad. Se puede obtener $\det(A)$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos que resulten. Es decir, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna) y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila).

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ contiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A^t es la matriz transpuesta de A, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.

Propiedades. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \det(kA) &= k^n\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si, y solo si, $\det(A) \neq 0$. En el caso de que A sea inversible vale $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Interpretación geométrica del determinante

Si $O = (0,0)$, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ son tres puntos en $\mathbb{R}^2$, el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ es

$$\left| \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ es

$$\left| \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \right| = |(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}|$$

Ejercicios

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ por tercera fila; por primera columna.

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ por primera fila; por segunda fila; por cuarta columna; por tercera columna.

Ejercicio 3. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^t)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

Ejercicio 6.

a) Determinar todos valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A no es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

Ejercicio 8. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

a) $\det(2A)$ *b*) $\det((3A)^{-1})$ *c*) $\det(3A^{-1})$

Ejercicio 9. En cada caso, calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

a) $O = (0,0)$, $P = (1,-2)$, $Q = (3,2)$.

b) $O = (0,0)$, $P = 2(1,-2)$, $Q = 2(3,2)$.

Ejercicio 10. Sean $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (4,2,1)$ y $\mathbf{w} = (3,1,1)$.

a) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(A)$ y el volumen del paralelepípedo determinado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$. ¿Qué se puede concluir?

Ejercicios surtidos

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(B) = -3$.

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema $(A^2 + 2A)\mathbf{x} = 0$ tiene solución no trivial.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$.

Práctica 8

Introducción a las transformaciones lineales

Definiciones y propiedades

Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Una *transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función que satisface las dos propiedades siguientes:

TL1. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.

TL2. Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(k\mathbf{v}) = k\,T(\mathbf{v})$.

Son transformaciones lineales:

- La función nula $0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- La función identidad $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedades. Cualquier transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisface:

a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

c) $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

d) $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r) = a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_rT(\mathbf{v}_r)$ para $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$.

Dada una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que T puede escribirse en la forma

$$T(x_1,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

La representación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se llama la *expresión matricial canónica de* T y a la matriz A se la denomina la *matriz de la transformación lineal* T. Escribiremos A_T para representar esta matriz.

Teorema. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en $\mathbb{R}^m$, entonces hay una única transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Geometría y transformaciones lineales en el plano

Algunas transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pueden interpretarse geométricamente.

- *Rotación* de ángulo θ en el sentido contrario al de las agujas del reloj:
$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- *Homotecia* de factor $k \in \mathbb{R}_{>0}$: $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$. Puede ser una *dilatación* (si $k > 1$) o una *contracción* (si $k < 1$). En este caso, $A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
- *Deslizamiento cortante en la dirección* x con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *Deslizamiento cortante en la dirección* y con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Imagen y preimagen de un conjunto por una transformación lineal

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ y $M \subset \mathbb{R}^m$, notamos:

$$\begin{aligned} T(\mathbb{S}) &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{s}) \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\} \ \text{ (imagen de } \mathbb{S} \text{ por } T) \\ T^{-1}(\mathbf{w}) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \ \text{ (preimagen o imagen inversa de } \mathbf{w} \text{ por } T) \\ T^{-1}(M) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) \in M\} \ \text{ (preimagen o imagen inversa de } M \text{ por } T) \end{aligned}$$

Propiedades. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\mathbb{S})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
Si $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $T^{-1}(\mathbb{T})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, llamamos:

- *núcleo* de T al conjunto $\operatorname{Nu}(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$,
- *imagen* de T al conjunto $\operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$.

Observamos que $\operatorname{Nu}(T) = T^{-1}(\mathbf{0})$, $\operatorname{Im}(T) = T(\mathbb{R}^n)$.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) $\operatorname{Nu}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

b) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^n$, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es un conjunto de generadores de $\operatorname{Im}(T)$.

c) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A_T)$.

Teorema de la dimensión. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n.$$

Clasificación, composición e inversa

Decimos que una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica "$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$".
- *epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$.
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) T es monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

b) Si T es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces T es isomorfismo si y sólo si "Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$".

Dadas dos transformaciones lineales, $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, la composición

$$S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \text{ definida por } (S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v})),$$

es una transformación lineal. La matriz de la composición $S \circ T$ es $A_{S\circ T} = A_S A_T$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo, la función inversa

$$T^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ que cumple } T \circ T^{-1} = \mathrm{id} \text{ y } T^{-1} \circ T = \mathrm{id},$$

es isomorfismo. La matriz de la inversa de T es $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.

Propiedad. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son isomorfismos, entonces $S \circ T$ es isomorfismo y se verifica $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Una transformación lineal $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un *proyector* si $p \circ p = p$.
Si $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un proyector, entonces para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, vale $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Son ejemplos de proyectores la proyección ortogonal sobre una recta en $\mathbb{R}^2$, o sobre un plano o una recta en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Determinar si la función T es una transformación lineal.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 3, -x_2)\,.$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)\,.$

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0)\,.$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_3, 2x_2)\,.$

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4)$

f) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, -2x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la expresión funcional de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3. En cada caso, hallar la expresión matricial canónica de T.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)\,.$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)\,.$

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4,x_2,x_1-x_3)$

Ejercicio 4. Decidir si existe una transformación lineal T que satisface:

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-1) = (3,0),\ T(2,-2) = (0,-2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-2,0) = (3,4),\ T(2,0,1) = (-1,1),\ T(0,4,1) = (-7,-7)$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1,1) = (2,3,4),\ T(0,1,1) = (1,2,1),\ T(1,2,2) = (1,1,5)$

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1) = (2,1,1),\ T(1,0) = (0,2,0),\ T(5,2) = (4,8,2)$

Ejercicio 5. Hallar las expresiones funcional y matricial de la transformación lineal T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (2,1,-1)$, $T(0,1,0) = (3,-1,1)$ y $T(0,0,1) = (0,0,4)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(2,0,0) = (4,2,2)$, $T(0,4,0) = (1,1,1)$ y $T(0,0,3) = (0,0,-1)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (0,3,1)$, $T(1,0,1) = (2,-1,1)$ y $T(1,1,0) = (3,2,4)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1) = (2,1)$ y $T(1,1) = (0,1)$.

Ejercicio 6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, verifica $T(1,1) = (-3,2)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \mathbf{x}$, verifica $T(1,2,1) = (-1,5,-6)$.

Ejercicio 7. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = x$ *d)* la recta $y = -x$

Ejercicio 8. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto al

a) plano xy *b)* plano xz *c)* plano yz

Ejercicio 9. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$ sobre

a) el eje x *b)* el eje y

Ejercicio 10. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre *a*) el plano xy *b*) el plano xz *c*) el plano yz

Ejercicio 11. Hallar la imagen del vector $(3,-4)$ cuando se lo hace girar, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con un ángulo de:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ *b*) $\dfrac{\pi}{4}$ *c*) $\dfrac{\pi}{2}$ *d*) π

En cada caso, dar la expresión matricial de la rotación correspondiente al ángulo dado.

Ejercicio 12. Hallar la expresión matricial de la rotación de ángulo

a) $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje x.

b) $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje y.

c) $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje z.

Ejercicio 13. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce un deslizamiento cortante con un factor de

a) $k=4$ en la dirección y. *b*) $k=-2$ en la dirección x.

Ejercicio 14. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce

a) una dilatación de factor $k=2$.

b) una contracción de factor $k=\dfrac{1}{2}$.

c) una dilatación de factor $k=2$ en la dirección x.

d) una contracción de factor $k=\dfrac{1}{2}$ en la dirección y.

Ejercicio 15. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, es decir el cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, por las transformaciones lineales de los ejercicios 7, 9, 11, 13 y 14.

Ejercicio 16. Hallar la imagen del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ y $(0,2)$ bajo

a) una simetría con respecto a la recta $y=x$.

b) una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

c) una contracción con factor $\dfrac{1}{2}$ en la dirección y.

d) una dilatación con factor 3 en la dirección x.

e) un deslizamiento cortante con factor 2 en la dirección x.

f) un deslizamiento cortante con factor 1 en la dirección y.

Ejercicio 17. Hallar una base de la imagen $T(\mathbb{S})$ del subespacio $\mathbb{S}$ por la transformación lineal T. Interpretar geométricamente.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ (II) $\mathbb{S} = \langle (1,2,0) \rangle$

Ejercicio 18. Hallar la preimagen $T^{-1}(M)$ del conjunto M por la transformación lineal T. Interpretar geométricamente.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = (8x_1, 3x_1 - x_2)$, para

(I) $M = \{(1,2)\}$ (II) $M = \langle (1,1) \rangle$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $M = \{(3,k)\}$, $k \in \mathbb{R}$. (II) $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 + x_2 = 0 \right\}$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)$, para

(I) $M = \{(-2,1,2)\}$ (II) $M = \langle (-2,1,2) \rangle$ (III) $M = \langle (2,1,1) \rangle$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $M = \{(2,-1,3)\}$ (III) $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(II) $M = \langle (2,-1,3) \rangle$

Ejercicio 19. Sean $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$, $\mathbf{w} = (2,3)$, $\mathbb{S} = \langle (1,2,1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Hallar $T(\mathbb{S})$, $T^{-1}(\mathbf{w})$ y $T^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 20. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3)$

c) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)$

d) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, -x_2 + x_4, x_4)$

Ejercicio 21. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $T(1,0,-2)$ y $T(0,0,1)$.

b) Dar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

c) Calcular $T^{-1}(-1,1,-2)$.

Ejercicio 22. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 13 & 5 \end{pmatrix}$.
Calcular la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.

Ejercicio 23. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2k^2, 2, 3k) \in \mathrm{Im}(T)$.

Ejercicio 24. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(0,0,2) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,-1) = (3,-2,0)$ y $T(2,1,0) = (1,2,2)$.

a) Calcular $T(0,2,-1)$.

b) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$ y una base de $\mathrm{Nu}(T)$.

Ejercicio 25. Para cada una de las transformaciones lineales T del ejercicio 3, calcular $\mathrm{rg}(A_T)$, $\dim(\mathrm{Im}(T))$ y $\dim(\mathrm{Nu}(T))$. Decidir cuáles son monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 26. En cada caso, definir, si es posible, una transformación lineal que verifique las condiciones enunciadas.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 = 0\}$, $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,0) \rangle$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 0\}$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1,1,2) \in \mathrm{Nu}(T)$, $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,0,1), (2,1,0) \rangle$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1,0,1) \in \mathrm{Nu}(T)$ y T es epimorfismo

e) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Im}(T)$

f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Im}(T)$

g) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) \subset \mathrm{Im}(T)$ y $T(3,2,1) = T(-1,2,0) \neq 0$

Ejercicio 27. Sean $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; x_1 - 3x_3 = 0\}$, $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$, $\mathbb{T}_1 = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$ y $\mathbb{T}_2 = \langle (2,1,3), (0,0,1) \rangle$. Hallar una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente: $T(\mathbb{S}_1) \subseteq \mathbb{T}_1$, $T(\mathbb{S}_2) \subseteq \mathbb{T}_2$ y $\mathrm{Nu}(T) \neq \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 28. Sean las transformaciones lineales $T_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ $T_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y $T_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A_{T_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar las expresiones matriciales de $T_1 \circ T_1$, $T_2 \circ T_3$ y $T_3 \circ T_2$.

Ejercicio 29. Hallar $S = T_2 \circ T_1$, $T = T_1 \circ T_2$ y determinar el núcleo y la imagen de T_1, T_2, S y T.

a) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3)$;
$T_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1, x_2)$.

b) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T_1(0,0,1) = (0,-1,1)$, $T_1(0,1,1) = (1,0,1)$ y $T_1(1,1,1) = (1,1,0)$;
$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 - x_3, 2x_1 + x_2)$.

Ejercicio 30. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ que se indica.

a) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

b) Una proyección ortogonal sobre el eje y seguida de una contracción con factor $k = \dfrac{1}{2}$.

c) Una simetría con respecto al eje x seguida de una dilatación con factor $k = 3$.

d) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una proyección ortogonal sobre el eje x, seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

e) Una dilatación de factor $k = 2$ seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario a las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto al eje y.

f) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{7\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 31. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ que se indica.

a) Una simetría con respecto al plano yz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano xz.

b) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto del eje y seguida de una dilatación de factor $k = \sqrt{2}$.

c) Una proyección ortogonal sobre el plano xy seguida de una simetría con respecto al plano yz.

d) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z seguida de una contracción con factor $k = \dfrac{1}{4}$.

e) Una simetría con respecto al plano xy seguida de una simetría con respecto al plano xz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano yz.

f) Una rotación de ángulo $\dfrac{3\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje y, seguida de una rotación de ángulo π en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z.

Ejercicio 32. Hallar la función inversa del isomorfismo T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (1,-1,1)$, $T(2,0,1) = (1,1,0)$ y $T(0,1,0) = (0,0,1)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Ejercicio 33. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix}$.
Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que T es monomorfismo.

Ejercicio 34. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(1,1,1) = (1,1,2)$, $T(1,2,0) = (-1,1,1)$ y $T(1,0,0) = (0,1,1+k)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathrm{Nu}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Ejercicio 35. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

a) Calcular $T \circ T(3,0,0)$, $T \circ T(1,-2,0)$ y $T \circ T(0,0,1)$.

b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T \circ T)$ y de $\mathrm{Im}(T \circ T)$.

Ejercicio 36. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 = 0\}$. Definir una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente $\mathrm{Nu}(T) = \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}(T \circ T) = \mathbb{T}$.

Ejercicio 37. Determinar si la transformación lineal p es un proyector.

a) $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(x_1,x_2,x_3) = (x_1,0,0)$

b) $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x_1,x_2) = (x_2,0)$

c) $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2)$

d) $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2, 0)$

Ejercicio 38. Definir un proyector p tal que

a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(-1,2)\rangle$, $\mathrm{Im}(p) = \langle(-1,1)\rangle$.

b) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(1,1,-2)\rangle$. ¿Es único?

c) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(2,-1,3)\rangle$, $\mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$. Interpretar geométricamente.

Ejercicio 39. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ por la transformación lineal T y calcular su área. Graficar.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

Ejercicio 40. Hallar la imagen del cubo unitario de $\mathbb{R}^3$ por la transformación lineal T y calcular su volumen.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, 5x_3)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$

Ejercicios surtidos

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que satisface: $T \circ T = 0$, $T(1,0,0) = (1,2,2)$ y $(0,0,1) \in \mathrm{Nu}(T)$. Hallar la expresión matricial de T.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $A_T = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, y sea $\mathbf{v} = (0,5,1)$. Determinar $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ y, para el valor k hallado, decidir si $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(T)$.

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathrm{Nu}(T) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 3x_2 - x_3)$. Definir un proyector $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \circ p = 0$.

5. Sean $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales dadas por $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ y $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $(T \circ S)^{-1}(\langle (1,1,1) \rangle)$.

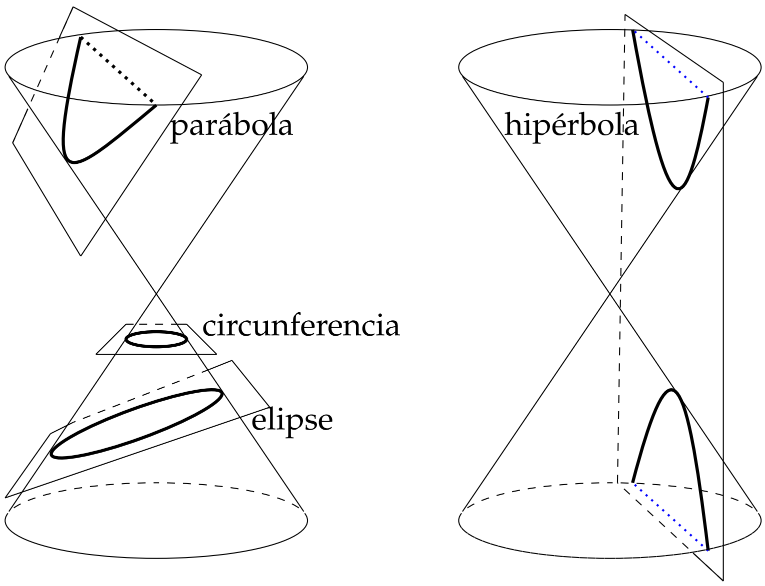
6. Sean $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \right\}$. Decidir si $T \circ T(9,7,2) \in \mathbb{S}$.

Práctica 9

Cónicas

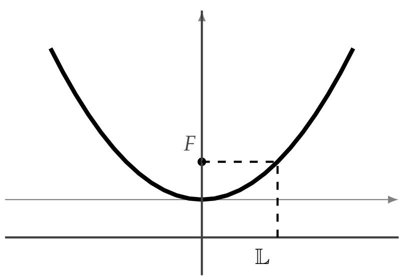
Definiciones y propiedades

Las *cónicas* son curvas planas que se obtienen intersecando un cono con un plano.



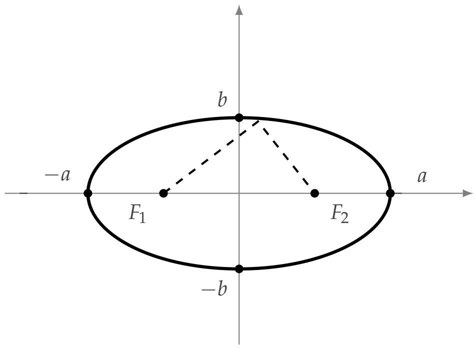
En todos los casos, pueden definirse a partir de fórmulas que involucran relaciones de distancia. Existen puntos fijos (llamados *focos*) y rectas fijas (llamadas *directrices*) tales que los puntos P de la cónica cumplen que el cociente entre la distancia de P al foco y la distancia de P a la directriz es una constante e llamada *excentricidad*.
Una *parábola* es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, el foco, y de una recta $\mathbb{L}$ que no pasa por F, la directriz.

El siguiente gráfico representa a la parábola que tiene foco $F = (0, c)$ y directriz $\mathbb{L} : y = -c$ $(c > 0)$. La ecuación es $x^2 - 4cy = 0$ (la forma canónica de la ecuación de la parábola).

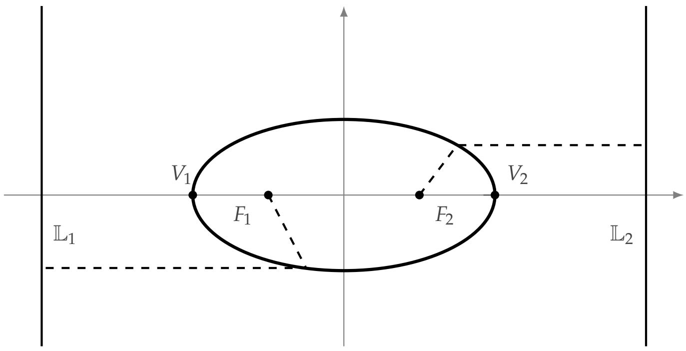


El *eje* de la parábola es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. El *vértice* es el punto de intersección del eje con la parábola (es el punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz). En la parábola del gráfico, el eje es el eje y y el vértice el $(0,0)$.
En el caso de una parábola, la relación de distancias es $\dfrac{d(P,F)}{d(P,\mathbb{L})} = 1 = e$.
La parábola es simétrica respecto de su eje.

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos P del plano que cumplen que la suma de las distancias de P a dos puntos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, con $2a > d(F_1, F_2)$.
El siguiente gráfico representa a la elipse que tiene focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ $(0 < c < a)$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (la forma canónica de la ecuación de la elipse).

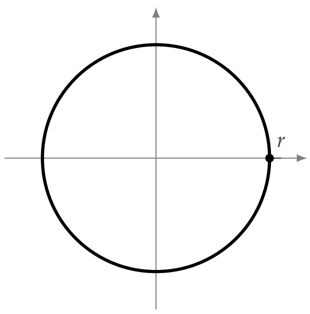


Los *vértices* de la elipse son los puntos V_1 y V_2 de intersección de la elipse con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices). El *eje mayor* es el segmento que une los vértices y el *eje menor* es el segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y une dos puntos de la elipse. Los *semiejes mayores* son cada uno de los segmentos que unen el centro de la elipse con los vértices y los *semiejes menores* son cada uno de los segmentos incluidos en el eje menor que unen el centro con los puntos de la elipse. En la elipse del gráfico los vértices son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$, el centro el $(0,0)$, el eje mayor está incluido en el eje x y el eje menor en el eje y.
Si c es la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y a es la distancia del centro a uno de sus vértices, la excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$.
Cada foco F_i $(i = 1, 2)$ de la elipse tiene asociada una recta directriz $\mathbb{L}_i$ paralela al eje menor. Cada punto P de la elipse verifica $e = \dfrac{d(P, F_i)}{d(P, \mathbb{L}_i)}$, con $i = 1, 2$. En el gráfico, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \dfrac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$.



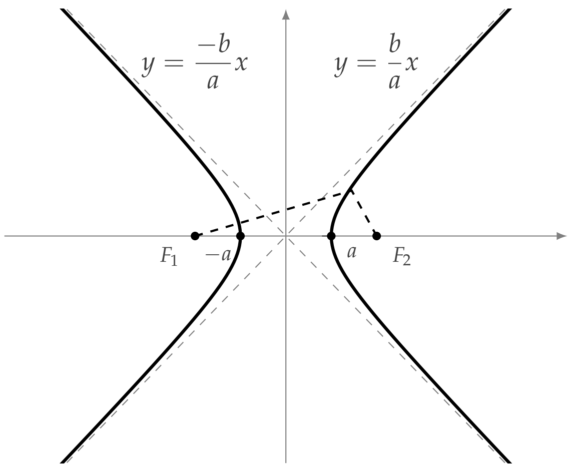
La elipse es simétrica respecto de su eje mayor y de su eje menor.

Una *circunferencia* es el conjunto de puntos P del plano que están a una distancia fija r de un punto dado C (el centro). Una circunferencia es un caso especial de elipse en el que los dos focos coinciden.
El siguiente gráfico representa una circunferencia con centro $C = (0, 0)$ y radio r.

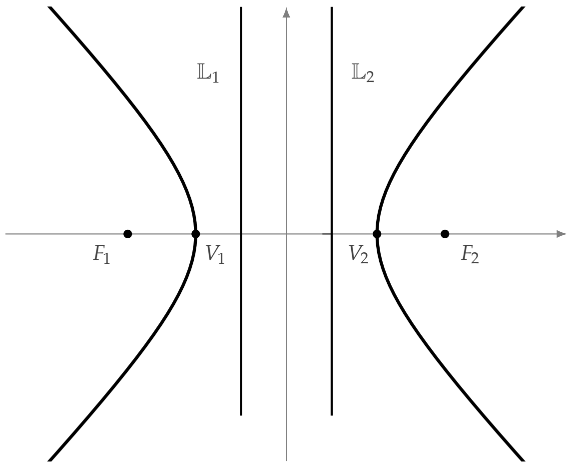


$x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$.

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos P del plano que cumplen que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, siendo $2a < d(F_1, F_2)$.
El siguiente gráfico representa la hipérbola con focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ $(c > a)$. La ecuación de esta hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (la forma canónica de la hipérbola).



En este gráfico, las rectas de ecuación $y = \frac{-b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ son las *asíntotas* de la hipérbola.
Los *vértices* de una hipérbola son los puntos de intersección de la hipérbola con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices) y el *eje transversal o real*, el segmento que une los vértices. En el gráfico, los vértices son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$, el centro es $(0, 0)$ y el eje transversal está incluido en el eje x.
Si c es la distancia del centro de la hipérbola a uno de sus focos y a es la distancia del centro al vértice correspondiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$.
Las directrices de la hipérbola son las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ que son perpendiculares al eje transversal y tales que cada punto P de la hipérbola verifica $e = \frac{d(P, F_i)}{d(P, \mathbb{L}_i)}$, con $i = 1, 2$. Si la hipérbola está dada por su ecuación canónica, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \frac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \frac{a^2}{c}$,



La hipérbola es simétrica respecto de la recta que contiene a su eje transversal y respecto de la recta perpendicular a su eje transversal que pasa por el centro (el eje no transversal o imaginario).

Reducción a la forma canónica

La forma más general de la ecuación de segundo grado en las variables x e y es

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Para estudiar si representa una parábola, una elipse, una circunferencia o una hipérbola se aplican traslaciones o rotaciones convenientes de manera de transformar esta ecuación en otra que esté dada en forma canónica.
Si la ecuación es de la forma $\alpha x^2 + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0$ $(\beta = 0)$, para eliminar los términos lineales, planteamos la traslación $(x, y) = (\overline{x} + h, \overline{y} + k)$. Si $\alpha \neq 0$, $h = \frac{-\lambda}{2\alpha}$, y si $\gamma \neq 0$,

$k = \dfrac{-\mu}{2\gamma}$. En el caso general de la ecuación de segundo grado, si $\beta \neq 0$, el ángulo θ que se deben rotar los ejes para eliminar el término en xy viene dado por $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{\beta}{\alpha - \gamma}$, si $\alpha \neq \gamma$, o $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, si $\alpha = \gamma$. Se plantea entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Luego de estas transformaciones se obtiene la forma canónica de la ecuación, es decir, una ecuación sin término xy, y con término lineal de una variable no nulo solo si el coeficiente del cuadrado de esa variable es cero.

En lo que sigue, llamaremos lugar geométrico al conjunto de puntos del plano que cumple con ciertas propiedades determinadas. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que están a distancia 1 del origen es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas. Representarlas gráficamente.

a) $y^2 = 6x$ *b)* $x^2 = 8y$ *c)* $3y^2 = -4x$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la ecuación de la parábola que posee los siguientes elementos:

a) foco $(3, 0)$ y directriz $x = -3$.

b) foco $(0, 6)$ y directriz el eje x.

c) vértice $(3, 2)$ y foco $(5, 2)$.

d) vértice en el origen, eje igual al de coordenadas x y pasa por $(-3, 6)$.

e) vértice $(-2, 3)$ y foco $(1, 3)$.

Ejercicio 3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ es igual a su distancia a la recta $x = -6$.

Ejercicio 4. Dadas las siguientes ecuaciones de parábolas, calcular las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

c) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

Ejercicio 5. En cada caso, hallar la ecuación de una parábola que cumpla las condiciones indicadas:

a) tiene eje paralelo al eje x y pasa por los puntos $(3,3)$, $(6,5)$ y $(6,-3)$.

b) tiene eje vertical y pasa por los puntos $(4,5)$, $(-2,11)$ y $(-4,21)$.

c) su vértice está sobre la recta $2y - 3x = 0$, su eje es paralelo al eje x y pasa por los puntos $(3,5)$ y $(6,-1)$.

Ejercicio 6. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados una distancia de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

Ejercicio 7. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(2,-1)$ sea igual a 5. ¿Qué figura representa?

Ejercicio 8. Caracterizar la figura que se obtiene al aplicarle a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ las siguientes transformaciones:

a) la contracción en la dirección y de factor $\frac{1}{2}$.

b) la transformación lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes elipses, hallar la longitud del semieje mayor, la longitud del semieje menor, las ecuaciones de las directrices, las coordenadas de los focos y la excentricidad.

a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ *b)* $9x^2 + 16y^2 = 576$ *c)* $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

Ejercicio 10. En cada caso, hallar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones indicadas:

a) focos $(4,0)$ y $(-4,0)$; vértices $(5,0)$ y $(-5,0)$.

b) focos $(0,8)$ y $(0,-8)$; vértices $(0,17)$ y $(0,-17)$.

c) focos $(0,6)$ y $(0,-6)$; semieje menor de longitud 8.

d) focos $(5,0)$ y $(-5,0)$; excentricidad $\dfrac{5}{8}$.

Ejercicio 11.

a) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(3,1)$ y $(-5,1)$ es igual a 10.

b) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(3,2)$ es la mitad de la correspondiente a la recta $x=-2$.

Ejercicio 12. Hallar la ecuación de la elipse

a) de centro el origen, focos en el eje x y que pasa por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, \dfrac{4\sqrt{5}}{3})$.

b) de centro $(4,-1)$, uno de los focos en $(1,-1)$ y que pasa por el punto $(8,0)$.

c) de centro $(3,1)$, uno de los vértices en $(3,-2)$ y excentricidad $e=\frac{1}{3}$.

d) con uno de sus focos el punto $(-1,-1)$, directriz $x=0$, y excentricidad $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 13. Dada la elipse de ecuación $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$, hallar las coordenadas del centro, la longitud del semieje mayor y del semieje menor y los focos.

Ejercicio 14. Un arco de 80 metros de luz tiene forma de media elipse (el semieje tiene longitud 80 metros). Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro.

Ejercicio 15. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse mide $148,5$ millones de kilómetros y que la excentricidad vale $0,017$, hallar las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

Ejercicio 16.

a) Calcular el área de las elipses del ejercicio 8.

b) Calcular el área de las elipses del ejercicio 10.

Ejercicio 17. Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las directrices, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$

b) $49y^2 - 16x^2 = 784$

Ejercicio 18. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) el eje transversal de longitud 8 y focos $(5,0)$ y $(-5,0)$.

b) centro $(0,0)$, un foco $(8,0)$ y un vértice $(6,0)$.

Ejercicio 19. En cada caso, hallar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones indicadas:

a) el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los dos puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ es igual a 5.

b) la distancia al punto $(0,6)$ es igual a $\dfrac{3}{2}$ de la correspondiente a la recta $y = \dfrac{8}{3}$.

c) el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $(-6,-4)$ y $(2,-4)$ es igual a 6.

Ejercicio 20. En cada caso, hallar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones indicadas:

a) tiene centro el origen, ejes sobre los ejes de coordenadas y pasa por los puntos $(3,1)$ y $(9,5)$.

b) tiene vértices $(6,0)$ y $(-6,0)$ y asíntotas $6y = 7x$ y $6y = -7x$.

Ejercicio 21. Hallar el centro, los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas y representar gráficamente la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes casos, por medio de una traslación, transformar la ecuación dada en otra sin términos de grado 1 y caracterizar la figura que representa.

a) $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$

d) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

e) $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$

f) $x^2 + 5y^2 + 2x - 20y + 25 = 0$

Ejercicio 23. Deducir la ecuación de la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ cuando se giran los ejes un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$.

Ejercicio 24. Hallar el ángulo de rotación de ejes necesario para eliminar el término en xy de la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$. Deducir la ecuación que se obtiene al hacer esta rotación y caracterizar la cónica.

Ejercicio 25. Decidir qué tipo de cónica define cada una de las siguientes ecuaciones haciendo, si es necesario, traslaciones y rotaciones.

a) $xy - 1 = 0$

b) $2xy - x + y - 5 = 0$

c) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

d) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - (14 + 6\sqrt{3})x + (26 + 6\sqrt{3})y + 4 - 6\sqrt{3} = 0$

f) $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$

Ejercicio 26. En cada caso, hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos dados y caracterizarla.

a) $(0,3)$, $(3,0)$, $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ y $(-3,0)$.

b) $(1,6)$, $(-3,-2)$, $(-5,0)$, $(3,4)$ y $(0,10)$.

Ejercicios surtidos

1. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

   a) la cónica $x^2 - 2ky^2 + 3kx + 16y - 23 = 0$ es una hipérbola con centro en $(-3,2)$. Para el valor hallado, encontrar la forma canónica.

   b) la cónica $25x^2 - 2k^3y^2 - 50k^2x + 12k^3y + 144 = 0$ es una elipse con centro en $(4,3)$.

2. Dada la cónica $kx^2 + 2xy + ky^2 + 2x + 2y + k = 0$,

   a) clasificar la cónica de acuerdo a los distintos valores de k.

   b) hacer un estudio completo de la cónica cuando $k = 0$.

3. Dada $\mathbb{L} : 3x - 8y = 7$, encontrar todas las rectas paralelas a $\mathbb{L}$ que intersecan a la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ en un solo punto.

4. Encontrar los puntos de intersección de las parábolas de ecuación $x^2 - 4y = 0$ y $x^2 - 6x + 2y - 30 = 0$.

5. Hallar los puntos de intersección de la elipse $x^2 + 3y^2 = 73$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$. Graficar.

6. En cada uno de los siguientes casos, encontrar todos los puntos de intersección de las cónicas:

a) $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$ y $x^2 - y^2 - 9 = 0$

b) $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 9 = 0$ y $2x^2 - 3y^2 + 4x + 18y - 43 = 0$

7. En cada uno de los siguientes casos, encontrar todos los puntos de intersección de las cónicas:

a) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 5 = 0$; $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ y $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0$