Transformaciones lineales

UNIDAD 6

GUÍA DE ACTIVIDADES

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar si la función T es una transformación lineal.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3, -x_2)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0)$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_3, 2x_2 - 3)$.

e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4)$

f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, -2x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la expresión funcional de $T(\vec{v}) = A\vec{v}$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. En cada caso, hallar la expresión matricial canónica de T.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$.

e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_2, x_1 - x_3)$.

Ejercicio 4. Decidir si existe una transformación lineal T que satisfaga:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(1, -1) = (3, 0)$ y $T(2, -2) = (0, -2)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(1, -2, 0) = (3, 4)$, $T(2, 0, 1) = (-1, 1)$ y $T(0, 4, 1) = (-7, -7)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 1, 1) = (2, 3, 4)$, $T(0, 1, 1) = (1, 2, 1)$ y $T(1, 2, 2) = (1, 1, 5)$.

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 1) = (2, 1, 1)$, $T(1, 0) = (0, 2, 0)$ y $T(5, 2) = (4, 8, 2)$.

Ejercicio 5. Hallar las expresiones funcional y matricial de la transformación lineal T.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 1, -1)$, $T(0, 1, 0) = (3, -1, 1)$ y $T(0, 0, 1) = (0, 0, 4)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(2, 0, 0) = (4, 2, 2)$, $T(0, 4, 0) = (1, 1, 1)$ y $T(0, 0, 3) = (0, 0, -1)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1, -1) = (0, 3, 1)$, $T(1, 0, 1) = (2, -1, 1)$ y $T(1, 1, 0) = (3, 2, 4)$.

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (2, 1)$ y $T(1, 1) = (0, 1)$.

Ejercicio 6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$, verifica $T(1,1) = (-3,2)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$, verifica $T(1,2,1) = (-1,5,-6)$.

Núcleo e Imagen

Ejercicio 7. En cada caso, hallen una base de la imagen $T(S)$ del subespacio S por la transformación lineal T . Interpretar geométricamente.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ para $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$ para

i) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$ ii) $S = \langle(1,2,0)\rangle$

Ejercicio 8. Hallar la preimagen $T^{-1}(M)$ del conjunto M por la transformación lineal T . Interpretar geométricamente.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (8x_1, 3x_1 - x_2)$, para
i) $M = (1,2)$ ii) $M = \langle(1,1)\rangle$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$, para
i) $M = (3,k), k \in \mathbb{R}$ ii) $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)$, para
i) $M = (-2,1,2)$ ii) $M = \langle(2,1,1)\rangle$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$, para
i) $M = \{(2,-1,3)\}$ ii) $M = M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Ejercicio 9. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$, $w = (2,3)$, $S = \langle(1,2,1)\rangle$ y $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Hallar $T(S)$, $T^{-1}(w)$ y $T^{-1}(L)$.

Ejercicio 10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $T(1,0,-2)$ y $T(0,0,1)$.

b) Dar bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$.

c) Calcular $T^{-1}(-1,1,-2)$.

Ejercicio 11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(0,0,2) = (1,-2,-1)$, $T(0,1,-1) = (3,-2,0)$ y $T(2,1,0) = (1,2,2)$.

a) Calcular $T(0,2,-1)$.

b) Hallar una base de $Im(T)$ y una base de $Nu(T)$.

Ejercicio 12. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T .

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3)$

c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)$

d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, -x_2 + x_4, x_4)$

Ejercicio 13. Para cada una de las transformaciones lineales T del ejercicio 3, decidir cuáles son monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 14. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que T es isomorfismo.

Ejercicio 15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(1, 1, 1) = (1, 1, 2)$, $T(1, 2, 0) = (-1, 1, 1)$ y $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1+k)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales T es isomorfismo.

Interpretación geométrica

Ejercicio 16. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ por la transformación lineal T y calcular su área. Graficar.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

Ejercicio 17. Hallar la imagen del cubo unitario de $\mathbb{R}^3$ por la transformación lineal T y calcular su volumen.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_2, 5x_3)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$

Ejercicio 18. Hallar la expresión matricial de

a) La simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a
  i) el eje x *ii*) el eje y *iii*) la recta $y = x$ *iv*) la recta $y = -x$

b) La proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$ sobre
  i) el eje x *ii*) el eje y

c) La simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto al
  i) el plano xy *ii*) el plano xz *iii*) el plano yz

d) La proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre
  i) el plano xy *ii*) el plano xz *iii*) el plano yz

Ejercicio 19. Hallar la imagen del vector $(3, -4)$ cuando se lo hace girar, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con un ángulo de:

a) $\frac{\pi}{6}$ *b*) $\frac{\pi}{4}$ *c*) $\frac{\pi}{2}$ *d*) π

En cada caso, dar la expresión matricial en $\mathbb{R}^3$ de la rotación correspondiente al ángulo dado.

Ejercicio 20. Hallar la expresión matricial de la rotación de ángulo

a) $\frac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje x.

b) $\frac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje y.

c) $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje z.

Ejercicio 21. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce

a) un deslizamiento cortante con un factor de

i) $k = 4$ en la dirección y *ii*) $k = -2$ en la dirección x

b) una dilatación de factor

i) $k = 2$ *ii*) $k = 2$ en la dirección x

c) una contracción de factor

i) $k = \dfrac{1}{2}$ *ii*) $k = \dfrac{1}{2}$ en la dirección y

Ejercicio 22. Hallar la imagen del rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$ bajo

a) una simetría con respecto a la recta $y = x$.

b) una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

c) una contracción con factor $\frac{1}{2}$ en la dirección y.

d) una dilatación con factor 3 en la dirección x.

e) un deslizamiento cortante con factor 2 en la dirección x.

f) un deslizamiento cortante con factor 1 en la dirección y.

Composición e Inversa

Ejercicio 23. Sean las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$, $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$, y $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A_{T_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar las expresiones matriciales de $T1 \circ T1$, $T2 \circ T3$ y $T3 \circ T2$.

Ejercicio 24. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ que se indica.

a) Una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

b) Una proyección ortogonal sobre el eje y seguida de una contracción con factor $k = \frac{1}{2}$.

c) Una simetría con respecto al eje x seguida de una dilatación con factor $k = 3$.

d) Una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una proyección ortogonal sobre el eje x , seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

e) Una dilatación de factor $k = 2$ seguida de una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido contrario a las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto al eje y .

f) Una rotación de ángulo $\frac{\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una rotación de ángulo $\frac{7\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, seguida de una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 25. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ que se indica.

a) Una simetría con respecto al plano yz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano xz .

b) Una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto del eje y seguida de una dilatación de factor $k = \sqrt{2}$.

c) Una proyección ortogonal sobre el plano xy seguida de una simetría con respecto al plano yz .

d) Una rotación de ángulo $\frac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\frac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z seguida de una contracción con factor $k = \frac{1}{4}$.

e) Una simetría con respecto al plano xy seguida de una simetría con respecto al plano xz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano yz .

f) Una rotación de ángulo $\frac{3\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje y , seguida de una rotación de ángulo π en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z .

Ejercicio 26. Hallar la función inversa del isomorfismo T.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1, -1) = (1, -1, 1)$, $T(2, 0, 1) = (1, 1, 0)$ y $T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$