Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

Unidad 5

Guía de actividades

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Se considera el sistema lineal

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + w & = & 2 \\ 3x + y + z + w & = & 6 \\ 5x - 3y - 3z + w & = & 0 \end{array} \right.$$

y los vectores $\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-2, 2, -3, 7)$, $\vec{v}_4 = (0, 2, 2, 2)$. Decidir cuáles de las cuaternas dadas son soluciones de S.

Ejercicio 2. Hallar, si es que existen, todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, -2, 3)$ es solución del sistema lineal dado en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcl} 2b\,x + y - z & = & 1 \\ x - a\,y + z & = & 0 \\ 4x - b\,y + a\,z & = & 4 \end{array} \right. . \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2a\,y + z & = & 0 \\ a\,y - b\,z & = & 4 \\ x + b\,y + (2a + b)z & = & b \end{array} \right. .$$

Ejercicio 3. Determinar (mediante razonamientos y/o contraejemplos) cuáles de las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema lineal generan otro sistema equivalente al original.

a) Sustituir dos ecuaciones por su suma.

b) Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.

c) Sumar 2 al primer miembro de cada ecuación del sistema.

d) Intercambiar dos ecuaciones entre sí.

e) Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla con otra.

f) Sustituir una ecuación por el resultado de restarle otra.

Ejercicio 4. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 5y & = 2 \\ -2x + 4y & = 6 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z & = 3 \\ x - 2y + z & = 3 \\ 2x + y - z & = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{rl} 3y - 2z + 3w & = 9 \\ 2x + y + w & = 5 \\ x - y + z - w & = -2 \end{array} \right.$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ x + 3y & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z & = 8 \\ x - y + z & = 1 \\ 5x + y - z & = 17 \end{array} \right. \qquad \text{(h)} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y - z + 2t & = 0 \\ x + y + z + 2t & = 1 \\ -x + y - 5z - 2t & = -3 \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = 2 \\ 2x + y & = 1 \\ x + 3y & = -1 \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z & = 3 \\ x - y + z & = 2 \\ 5x + y - z & = -5 \end{array} \right.$$

Ejercicio 5. Construir:

a) Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que $(-1, 2, -5)$ sea la única solución de cada sistema.

b) Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1, 2, -5)$ sea una de ellas.

Ejercicio 6. Agregar una ecuación al sistema lineal $S : \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y + z & = 1 \\ 4x + 2y - 2z & = 0 \end{array} \right.$ de manera que resulte:

a) compatible determinado.

b) compatible indeterminado.

c) incompatible.

Ejercicio 7. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

(a) $\begin{cases} (k^2-9)x+y+kz &= 0 \\ (k-1)y+z &= 0 \\ (k+2)z &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z &= k \\ x+ky+z &= 1 \\ kz &= 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ (k+2)x+ky-z &= 0 \\ -x+y-2z &= -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 7x+ky+(4+k)z &= 12 \\ 6x+ky+3z &= 9 \\ kx+(3-k)z &= 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+3y-z &= 3 \\ x-y+3z &= 1 \\ 3x+7y-5z &= k^2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+ky+2z-w &= k+2 \\ x+ky-2z &= 2 \\ -4z+k^2w &= -3k-2 \end{cases}$

Ejercicio 8. Determinar todos los valores de a, $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2,0,-1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x-a\,y+2z &= 2 \\ x+y-b\,z &= 3 \\ y-z &= 1 \end{cases}$$

Matrices

Ejercicio 9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

(a) $A+3B-3C$.
(b) $A+3(B-C)$.
(c) $A-(B-2C)$.
(d) $A-B+2C$.

Ejercicio 10. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4\times5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times7}$, $C \in \mathbb{R}^{7\times5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

(a) $A\cdot B$
(b) $B\cdot A$
(c) $B\cdot C$
(d) $C\cdot B$
(e) $A\cdot B\cdot C$
(f) $B\cdot C\cdot A$
(g) $A\cdot A$
(h) $B\cdot C\cdot B\cdot C$

Ejercicio 11. Cuando sea posible, calcular $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

a) A^2.

b) B^3.

c) $-2A^2+B^3A$.

Ejercicio 13. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) A^t y B^t.

b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 14. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, distintas de la matriz nula y de la matriz identidad, que cumplan:

(a) $A^2 = I$.
(b) $A^2 = 0$.
(c) $A^2 = A$.
(d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 15. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

a) A^{-1} y B^{-1}.

b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Ejercicio 16.

a) Escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales en notación matricial

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

b) Escribir las ecuaciones del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 17. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2} C$ para $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinantes

Ejercicio 19. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando propiedades y realizando la menor cantidad de cálculos posibles.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 22. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular los determinantes de las matrices:

(a) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$

Ejercicio 23. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 2$. Calcular:

(a) $\det(A^3)$
(b) $\det(-2A^3)$
(c) $\det((-2A)^3)$
(d) $\det(A^{-3})$
(e) $\det(B \cdot A \cdot B^{-1})$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ inversible

Ejercicio 25. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det(A) = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

(a) $\det(A + A \cdot B)$ (b) $\det(-2A^{-1} + A^{-1} \cdot 5B)$

Ejercicio 26. Clasificar el sistema lineal $S: \left\{ \begin{array}{rcl} -x + ay + z & = & a \\ -x + (1-a)z & = & 1 \\ -x + y + z & = & a^2 \end{array} \right.$ en términos del valor $a \in \mathbb{R}$ usando determinantes.

Ejercicio 27. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el el sistema determinado por la ecuación

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

admite solución no trivial.

Ejercicio 28. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con $\det(B) = 5$. Hallar **todos** los $X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tales que $(B \cdot A)X = 2B \cdot X$.